الدرس السابع : العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً : جمع الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

١) ٣ س ، ٤ س حدان جبريان متشابهان

مجموعهما هو حد جبرى مشابه لهما

أى : ٣ س + ٤ س = (٣ + ٤) س = ٧ س

بالمثل يمكن استنتاج أن :

٣ √٢ + ٤ √٢ = (٣ + ٤) √٢ = ٧ √٢

لاحظ أن :

العدد الحقيقى ٣ √٢ ينتج من حاصل ضرب العدد النسبى ٣ فى العدد غير النسبى √٢

٢) ٣ س ، ٤ ص حدان جبريان غير متشابهين

مجموعهما هو مقدار جبرى أبسط صورة له هى : ٣ س + ٢ ص

بالمثل : العددين الحقيقيين ٣ √٢ ، ٤ √٣ مجموعهما هو عدد حقيقى أبسط صورة له هى : ٣ √٢ + ٤ √٣

(أ) أوجد ناتج :

[١] ٣ √٥ − ٤ √٥ + √٥ = ...

[٢] √٣ − √٢ + ٥ √٢ − ٢ √٣ = ...

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١ الانغلاق :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح يكون : (أ + ب) ∈ ح

أى أن : مجموع أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

و بالتالى : ح مغلقة تحت عملية الجمع

فمثلاً :

ناتج جمع كل من ٣ + ٤ ، ٧ + √٢ هو عدد حقيقى

[٢ الإبدال :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح فإن : أ + ب = ب + أ

أى أن : عملية الجمع إبدالية فى ح

فمثلاً :

٧ + √٢ = √٢ + ٧

[٣ الدمج :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ∈ ح يكون :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) = أ + ب + حـ

فمثلاً :

(٣ + √٢) + ٤ = ٣ + (√٢ + ٤) الدمج

= ٣ + (٤ + √٢) الإبدال

= (٣ + ٤) + √٢ الدمج

= ٧ + √٢

[٤ العنصر المحايد الجمعى :

الصفر هو المحايد الجمعى فى ح لأن : أ + ٠ = ٠ + أ = أ

أحمد الشتنوى

فمثلاً :

$\sqrt{٣} + ٠ = ٠ + \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

٥] وجود معكوس جمعى لكل عد حقيقى :

لكل أ $\in$ ح يوجد (−أ) $\in$ ح حيث :

أ + (−أ) = صفر (المحايد الجمعى)

فمثلاً :

المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٣}$ هو : $-\sqrt{٣}$ و العكس صحيح

لأن : $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) = ٠$

ملاحظات :

١) المعكوس الجمعى للعدد : $٣ + \sqrt{٢}$ هو :

$-(٣ + \sqrt{٢}) = -٣ - \sqrt{٢}$

٢) المعكوس الجمعى للعدد : $٣ - \sqrt{٢}$ هو :

$-(٣ - \sqrt{٢}) = -٣ + \sqrt{٢} = \sqrt{٢} - ٣$

٣) المعكوس الجمعى للعدد صفر هو نفسه

ثانياً : طرح الأعداد الحقيقية :

حيث أن لكل عدد حقيقى معكوس جمعى فإن عملية الطرح ممكنة دائماً فى ح و تعرف كما يلى :

لكل أ ، ب $\in$ ح يكون : أ − ب = أ + (−ب) أى أن :

عملية الطرح (أ − ب) تعنى جمع أ مع المعكوس الجمعى للعدد ب

و يلاحظ أن :

عملية الطرح فى ح ليست إبدالية و ليست دامجة

(٢) أكمل ما يلى :

[١] $\sqrt{٧} + \sqrt{٧} = ...$

[٢] $\sqrt{٣} + ٤ = ٤ + ...$

[٣] $\sqrt{٥} + (-\sqrt{٥}) = ...$

[٤] $٦ + \sqrt{١١} = ٤ + (.... + \sqrt{١١})$

[٥] $٨\sqrt[٣]{٩} - ٤\sqrt[٣]{٩} = ...$

[٦] $٣\sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢} = ...$

[٧] $\frac{١}{٣}\sqrt{٦} + \sqrt{٦} + \frac{٢}{٣}\sqrt{٦} = ...$

[٨] المعكوس الجمعى للعدد : $\sqrt[٣]{-٨}$ هو ....

[٩] المعكوس الجمعى للعدد : $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

[١٠] المعكوس الجمعى للصفر هو ....

[١١] العدد المحايد الجمعى فى ح هو ....

أحمد الشتوى

ثالثاً : ضرب الأعداد الحقيقية :

تمهيد : نعلم أن :

١) ٣ × ٤ س = (٣ × ٤) س = ١٢ س

بالمثل يمكن استنتاج أن :

٣ × ٤ √٢ = (٣ × ٤) √٢ = ١٢ √٢

٢) ٣ س × ٤ س = (٣ × ٤) (س × س) = ١٢ س٢

بالمثل يمكن استنتاج أن :

٣ √٢ × ٤ √٢ = (٣ × ٤) (√٢ × √٢)

= ١٢ × ٢ = ٢٤

(٣) أوجد ناتج :

[١] ٢ × (−٥ √٥) = ...

[٢] √٢ × ٥ √٢ = ...

خواص جمع الأعداد الحقيقية :

[١ الانغلاق :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح يكون : (أ × ب) ∈ ح

أى أن : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

و بالتالى : ح مغلقة تحت عملية الضرب

فمثلاً :

حاصل ضرب كل من ٣ × ٤ = ١٢ ، ٧ × √٢ = ٧ √٢ ، √٢ × √٣ = √٦ هو عدد حقيقى

[٢ الإبدال :

إذا كان : أ ، ب ∈ ح فإن : أ × ب = ب × أ

أى أن : عملية الضرب إبدالية فى ح

فمثلاً :

٧ × √٢ = √٢ × ٧ = ٧ √٢

[٣ الدمج :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ∈ ح يكون :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) = أ + ب + حـ

فمثلاً :

√٢ × ٣ × √٢ = √٢ × (٣ × √٢) الدمج

= √٢ × (√٢ × ٣) الإبدال

= (√٢ × √٢) × ٣ الدمج

= ٢ × ٣ = ٦

[٤ العنصر المحايد الضربى :

الواحد هو المحايد الجمعى فى ح لأن : أ × ١ = ١ × أ = أ

فمثلاً :

√٣ × ١ = ١ × √٣ = √٣

[٥ وجود معكوس ضربى لكل عد حقيقى :

لكل عدد حقيقى أ ≠ صفر يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{أ}$ حيث :

أ × $\frac{١}{أ}$ = ١ (المحايد الضربى)

فمثلاً :

المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو : $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ و العكس صحيح

لأن : $\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} = ١$

ملاحظات :

١) العدد و معكوسه الضربى لهما نفس الإشارة

فمثلاً :

المعكوس الضربى للعدد $-\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ هو : $-\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

٢) المعكوس الضربى للعدد : ١ هو نفسه

، و المعكوس : للعدد -١ هو نفسه

٣) لا يوجد معكوس ضربى للعدد صفر لأن : $\frac{١}{٠}$ ليس لها معنى

٤) $١ = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = ...$

٥) يفضل أن يكون مقام العدد الحقيقى عدداً صحيحاً

فمثلاً :

$$\frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$$

$$، \frac{٦}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{٦}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{٦\sqrt[٣]{٢}}{٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$$

[٦] توزيع الضرب على الجمع :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، حـ يكون :

أ × (ب + حـ) = (أ × ب) + (أ × حـ) = أ ب + أ حـ

، (أ + ب) × حـ = (أ × حـ) + (ب × حـ) = أ حـ + ب حـ

فمثلاً :

$$٣\sqrt{٥}\,(٤ + \sqrt{٥}) = ٣\sqrt{٥} \times ٤ + ٣\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$$

$$= ٣ \times ٤\sqrt{٥} + ٣ \times ٥ = ١٢\sqrt{٥} + ١٥$$

رابعاً : قسمة الأعداد الحقيقية :

حيث أن لكل عدد حقيقى لا يساوى الصفر معكوس ضربى فإن عملية القسمة على أى عدد حقيقى خلاف الصفر ممكنة دائماً فى ح

و تعرف كما يلى :

لكل أ ∈ ح ، ب ∈ ح − {٠} يكون : أ/ب = أ × ١/ب (ب ≠ ٠)

أى أن :

عملية القسمة (أ/ب) تعنى ضرب أ فى المعكوس الضربى للعدد ب

و يلاحظ أن :

عملية القسمة فى ح ليست إبدالية و ليست دامجة

(٤) أكمل ما يلى :

[١] $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ...$

[٢] $\sqrt{٣} \times ٤ = ٤ + ...$

[٣] $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ... \times \sqrt{٢} = ...$

[٤] $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = ...$

[٥] $٢\sqrt[٣]{٢} \times ٤\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} = ...$

أحمد الشنتورى

[٦] $\sqrt{٥}\,(\sqrt{٥} + \sqrt{٢}) = ...$

[٧] $\sqrt{٣}\,(٢\sqrt{٣} - ٣) = ...$

[٨] $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) = ...$

[٩] $(\sqrt{٥} + ٢)^{٢} = ...$

[١٠] المعكوس الضربى للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

[١١] العدد المحايد الضربى فى ح هو ....

(٥) إذا كان : س $= \sqrt{٣} + ٢$ ، ص $= \sqrt{٣} - ٢$ أوجد قيمة :

[١] س + ص   [٢] س ص   [٣] س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢}

أحمد الشتورى

(٦) أكمل لتقدير ناتج $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$
و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

تقدير $\sqrt{١٠}$ هو : .....   لأن : $\sqrt{٩} = ...$

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})$ هو : ٥ + ... = ...

، تقدير $\sqrt[٣]{٧}$ هو ....   لأن : $\sqrt[٣]{٨} = ...$

∴ تقدير $(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : ٣ − .... = ...

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو : .... × .... = ...

و باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو ....

أى أن التقدير ....

(٧) أعط تقديراً لناتج $(٢ + \sqrt{١٥})(٤ - \sqrt[٣]{٢٥})$
و تحقق من صحة التقدير باستخدام الآلة الحاسبة

(٨) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ...$

(٥ ، ١٠ ، $٢\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{١٠}$)

[٢] $(٢\sqrt{٢})^٢ = ...$

(٤ ، ٨ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٨}$)

[٣] $(٢\sqrt[٣]{٥})^٣ = ...$

(٤٠ ، ٢٠ ، $٤\sqrt[٣]{٥}$ ، $٨\sqrt[٣]{٥}$)

[٤] المعكوس الجمعي للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

($٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $-٣\sqrt{٢}$)

[٥] المعكوس الجمعي للعدد $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})$ هو ....

($\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$)

[٦] $\frac{١٥}{٣\sqrt{٥}} = ...$

($١٥\sqrt{١٥}$ ، $٥\sqrt{٥}$ ، $٣\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$)

[٧] $\frac{٦ - \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ...$

($١ - ٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣} - ١$ ، $١ + ٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣} + ١$)

[٨] المعكوس الضربى للعدد $\frac{-٣}{\sqrt{٣}} = ...$

($\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $-٣\sqrt{٣}$)

أحمد الشنتورى

[٩] $(\sqrt{٥} - ٣)^٢ = ١٤ - ....$

($٢\sqrt{٥}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $٦\sqrt{٥}$ ، $٩\sqrt{٥}$)

[١٠] إذا كان بعدا مستطيل هما $(١٠ + \sqrt{٢})$ سم ، $(١٠ - \sqrt{٢})$ سم
فإن محيطه = ... سم

(٤٠ ، ٢٠ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢}$)

[١١] إذا كان بعدا مستطيل هما $(٦ + \sqrt{٥})$ سم ، $(٦ - \sqrt{٥})$ سم
فإن مساحته = ... سم^٢

(٤١ ، ٣١ ، ٣٠ ، $٦\sqrt{٥}$)

[١٢] إذا كان : $\sqrt{س} = \sqrt{٢} + ١$ فإن : س = ...

($٢ - ٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢} - ٣$ ، $٢ + ٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢} + ٣$)

[١٣] إذا كان : $س^٢ = (٢\sqrt{٣} + ٣)(٢\sqrt{٣} - ٣)$
فإن : س = ...

($\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $\pm\sqrt{٣}$ ، ± ٣)

[١٤] إذا كان : $س^٢ - ص^٢ = ١٦$ ، $س - ص = \sqrt{٢}$
فإن : س + ص = ...

($٤\sqrt{٢}$ ، $٨\sqrt{٢}$ ، $١٤\sqrt{٢}$ ، $٣٢\sqrt{٢}$)

[١٥] إذا كان : المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{س} - ١$ هو العدد
$\frac{١}{٤}(\sqrt{س} + ١)$ فإن : س = ...

(٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢)

الدرس الثامن : العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

١) $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ ب}}$

فمثلاً : $\sqrt{٢} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢ \times ٥} = \sqrt{١٠}$

٢) $\sqrt{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$

فمثلاً : $\sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : $\text{س}\sqrt{\text{ص}}$

لاحظ : يجب أن يكون أحد العددين مربع كامل بخلاف الواحد

(١) ضع كل مما يلى على صورة $\text{س}\sqrt{\text{ص}}$ حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة ممكنة :

[١] $\sqrt{٨} =$ ....

[٢] $\sqrt{٢٠} =$ ....

[٣] $\sqrt{٤٨} =$ ....

[٤] $٢\sqrt{٧٥} =$ ....

[٥] $\frac{١}{٢}\sqrt{٧٢} =$ ....

٣) $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ حيث : ب ≠ صفر

أحمد الشنتورى

فمثلاً :

$\sqrt{\frac{٥}{٤}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٤}} = \frac{\sqrt{٥}}{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt{٥}$

$\sqrt{\frac{٩}{٢}} = \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$

٤) $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} \times \frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ ب}}}{\text{ب}}$ حيث : ب ≠ صفر

أحمد الشنتورى

فمثلاً :

$\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

(٢) اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠} =$ ....

[٢] $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥} =$ ....

[٣] $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} =$ ....

[٤] $\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٣٢} =$ ....

أحمد الشنتورى

العددان المترافقان :

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين موجبين فإن :

كلاً من العددين : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

هو مرافق للعدد الآخر

و يكون مجموعهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) + (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

= $٢ \sqrt{أ}$ = ضعف الحد الأول

و حاصل ضربهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) \times (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

= $(\sqrt{أ})^{٢} - (\sqrt{ب})^{٢}$ = أ − ب

= مربع الحد الأول − مربع الحد الثانى

ملاحظة : حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدد نسبى

فمثلاً : مرافق العدد $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$ هو $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ و

يكون : مجموعهما = $٢\sqrt{٣}$ ، و حاصل ضربهما = ٣ − ٢ = ١

(٣) أكمل ما يلى :

[١] مرافق العدد $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

[٢] مرافق العدد $(٣ - \sqrt{٧})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

[٣] مرافق العدد $(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٦})$ هو ....

و مجموعهما = ... و حاصل ضربهما = ...

ملاحظة : إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ أو $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ فيجب وضعه فى أبسط صورة و ذلك بضرب البسط و المقام فى مرافق المقام

فمثلاً : لكتابة العدد $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ فى أبسط صورة نتبع ما يلى :

$$\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٣ (\sqrt{٥} + \sqrt{٢})}{٥ - ٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$$

(٤) أكتب ما يلى فى أبسط صورة :

[١] $\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$ = ...

[٢] $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$ = ...

أحمد الشتوى

(٥) إذا كان : س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة كل من :

[١] س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

[٢] س^{٢} − س ص + ص^{٢}

اكتب ذاكرولي في البحث وانضم لجروبات ذاكرولي
من رياض الاطفال للصف الثالث الاعدادي

أحمد الششتورى

(٦) إذا كان : س = $\sqrt{١٣} + \sqrt{٦}$ ، س ص = ٧

أوجد قيمة كل من :

[١] $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س ص} - ٥}$ [٢] س^{٢} ص^{٢}

(٧) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{١٢} - \sqrt{٣} = ...$ (٣ ، ٩ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)

[٢] $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٨} - \sqrt{٢} = ...$
($٢\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣٠}$ ، ٢)

[٣] $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥}) (\sqrt{٧} + \sqrt{٥}) = ...$
(٢ ، ١٢ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $-٢\sqrt{٥}$)

[٤] $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^{٢} = ...$
(١٠ ، ١٨ ، $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{١٨}$)

[٥] $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} = ...$
(١ ، $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$)

[٦] المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥٠}$ هو ....
($\frac{١}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $-\frac{١}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، $-٥\sqrt{٢}$)

[٧] العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٨}$ ، $\sqrt{٣٢}$ هو ....
($\sqrt{٣٨}$ ، $\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $\sqrt{٨٠}$)

[٨] $\frac{١}{٢}\sqrt{٤٨} = ٢ \times ....$
($\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$)

[٩] إذا كان : $٢\sqrt{٢٧} - ٢\sqrt{٤٨} =$ س $\sqrt{٣}$ فإن :
س = ... (٢ ، ٣ ، −٢ ، −٣)

[١٠] $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{١٠} (\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{١٠} = ...$
(١ ، $٢\sqrt{٣}$ ، −١ ، $-٢\sqrt{٣}$)

(٨) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المعكوس الضربى للعدد ($\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$) فى أبسط صورة هو ....

[٢] إذا كان : س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$
فإن : (س ص ، س + ص) = ...

[٣] إذا كان : س = ٢ + $\sqrt{٥}$ ، ص العدد المرافق للعدد س
فإن : $($ س − ص $)^{٢}$ = ...

[٤] مساحة المثلث الذى طول قاعدته ($\sqrt{٢٨}$ + ٢) سم ،
ارتفاعه ($\sqrt{٧}$ − ١) سم تساوى .... $سم^{٢}$

[٥] إذا كان : س = $\sqrt{٢}$ − ١ ، س ص = ١ فإن :
ص = ...

[٦] $٤\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨} = ...$

[٧] $١٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} - ٨\sqrt{\frac{٣}{٢}} = ...$

أحمد الشتورى

الدرس التاسع : العمليات على الجذور التكعيبية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}}$

١) $\sqrt[٣]{\text{أ}} \times \sqrt[٣]{\text{ب}} = \sqrt[٣]{\text{أ ب}}$

فمثلاً : $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٢ \times ٥} = \sqrt[٣]{١٠}$

٢) $\sqrt[٣]{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt[٣]{\text{أ}} \times \sqrt[٣]{\text{ب}}$

فمثلاً : $\sqrt[٣]{٢٤} = \sqrt[٣]{٨ \times ٣} = \sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٣} = ٢\sqrt[٣]{٣}$

تستخدم هذه القاعدة لكتابة العدد على الصورة : س $\sqrt[٣]{\text{ص}}$

لاحظ : يجب أن يكون أحد العددين مكعب كامل بخلاف الواحد

(١) ضع كل مما يلى على صورة س $\sqrt[٣]{\text{ص}}$ حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة ممكنة :

[١] $\sqrt[٣]{١٦} =$ ....

[٢] $\sqrt[٣]{-٤٠} =$ ....

[٤] $٢\sqrt[٣]{٨١} =$ ....

[٥] $\frac{١}{٥}\sqrt[٣]{٢٥٠} =$ ....

٣) $\frac{\sqrt[٣]{\text{أ}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}}} = \sqrt[٣]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ حيث : ب ≠ صفر ، أ ، ب ∈ ح

أحمد الشتوى

فمثلاً : $\frac{\sqrt[٣]{٢٤}}{\sqrt[٣]{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{٢٤}{٣}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

٤) $\sqrt[٣]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}}}$ حيث : ب ≠ صفر ، أ ، ب ∈ ح

أحمد الشتوى

فمثلاً : $\sqrt[٣]{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{\sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} \times \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt[٣]{١٢}$

(٢) اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢٥٠} =$ ....

[٢] $\sqrt[٣]{١٠٨} + \sqrt[٣]{٣٢} =$ ....

[٣] $\sqrt[٣]{٨١} - ٣\sqrt[٣]{-\frac{١}{٩}} =$ ....

[٤] $\sqrt[٣]{٢٥٠} - ٢\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{٥٤} =$ ....

أحمد الشتوى

(٣) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt[٣]{٨١} - \sqrt[٣]{٢٤} = ...$

(٣ ، $\sqrt[٣]{٥٧}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)

[٢] $\sqrt[٣]{١٣٥} + \sqrt[٣]{٤٠} = ...$

(٥ ، $٥\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{١٧٥}$)

[٣] $٢\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٩} = ...$

(٦ ، ٣ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

[٤] $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢} = ...$

($\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، $\sqrt[٣]{١٦}$)

[٥] $\sqrt[٣]{-٢٤} - ٩\sqrt[٣]{\frac{٨}{٩}} = ...$

($-٨\sqrt[٣]{٣}$ ، $٨\sqrt[٣]{٣}$ ، $١٢\sqrt[٣]{٣}$ ، $٢٠\sqrt[٣]{٩}$)

(٤) أختصر كلاً مما يلى لأبسط صورة :

[١] $\frac{٧}{٣}\sqrt{١٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt{٩٨} + \sqrt[٣]{١٦} = ...$

[٢] $\sqrt[٣]{٨١} - \sqrt{٢٨} + \sqrt[٣]{-٢٤} + \sqrt{٦٣} = ...$

(٥) إذا كان : $س = ٣ + \sqrt[٣]{٦}$ ، $ص = ٣ - \sqrt[٣]{٦}$

أوجد قيمة كل من :

[١] $(س - ص)^{٣}$

[٢] $(س + ص)^{٣}$

أحمد الشتورى

الدرس العاشر : تطبيقات على الأعداد الحقيقية

الدائرة :



محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية
مساحة سطح الدائرة = π نق^٢ وحدة مربعة

حيث : نق طول نصف قطر الدائرة ،

π هى النسبة التقريبية بين محيط الدائرة و طول القطر

، π = $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤

فمثلاً :

لايجاد مساحة دائرة محيطها ٣١,٤ سم ، (π = ٣,١٤) نتبع ما يلى :

بما أن : محيط الدائرة = ٢ π نق

إذن : ٣١,٤ = ٢ × ٣,١٤ نق = ٦,٢٨ نق

إذن : نق = ٣١,٤ ÷ ٦,٢٨ = ٥ سم

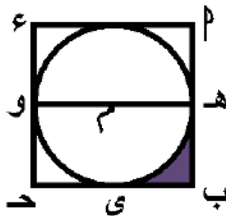
، مساحة سطح الدائرة = π نق^٢ = ٣,١٤ × ٥ × ٥ = ٧٨,٥ سم^٢

(١) دائرة محيطها ٨٨ سم أوجد مساحة سطحها (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٢) دائرة مساحة سطحها ٣١٤ سم^٢ أوجد محيطها (π = ٣,١٤)

أحمد الشتورى

(٣) فى الشكل المقابل :

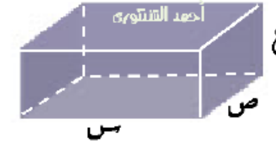


أ ب حـ ء مربع مرسوم داخل دائرة م

فإذا كان محيط الجزء المظلل ٢٥ سم أوجد :

مساحة المربع ، مساحة الدائرة (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

متوازى المستطيلات :



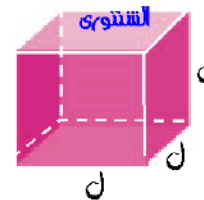
هو مجسم جميع أوجهه مستطيلة الشكل
و كل وجهين متقابلين متطابقان
إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص ، ع فإن :

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
= ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
= ٢ (س ص + ص ع + س ع) وحدة مربعة

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع
= س × ص × ع وحدة مكعبة

حالة خاصة : المكعب



هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية
إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن :

مساحة كل وجه = ل^{٢} وحدة مربعة

المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢} وحدة مربعة

المساحة الكلية = ٦ ل^{٢} وحدة مربعة

الحجم = ل^{٣} وحدة مكعبة

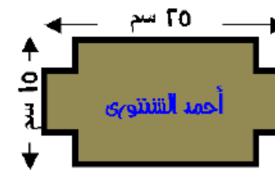
أحمد الشتورى

(٤) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، و حجمه ٧٢٠ سم^{٣} و ارتفاعه ٥ سم أوجد حجمه

(٥) مكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣} أوجد مساحته الكلية

(٦) أيهما أكبر حجماً مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ سم

(٧) قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥ سم ، ١٥ سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً على شكل متوازى مستطيلات أوجد حجمه و مساحته الكلية

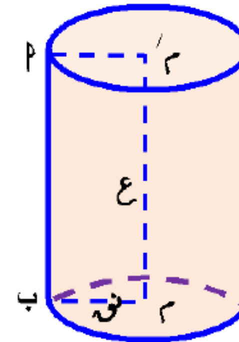


(٨) مكعب حجمه ١٧٢٨ سم^{٣} ، قطع عند أحد أحرفه متوازى مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٢ سم ، ١ سم أوجد المساحة الكلية للجزء المتبقى من المكعب

(٩) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و إرتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم أوجد حجمه

أحمد الشتوى

الأسطوانة الدائرية القائمة :



هى مجسم له قاعدتان متوازيتان و متطابقتان كل منهما عبارة سطح دائرة أما السطح الجانبى فهو سطح منحنى يسمى سطح الأسطوانة

فى الشكل المقابل :

إذا كان : م ، م/ مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن :

م م/ هو ارتفاع الأسطوانة ، م ب = م م

كل منهما = طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة

، $\overline{م ب} // \overline{م م/}$ و إذا قطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{م ب}$ و بسطنا هذا السطح نحصل على سطح المستطيل م ب ب/ م/ و يكون : م ب = ارتفاع الأسطوانة ، م م/ = محيط قاعدة الأسطوانة

، مساحة المستطيل م ب ب/ م/ = المساحة الجانبية للأسطوانة

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} ع وحدة مكعبة

أحمد الشتنوى

(١٠) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل م ب حـ ء فيه م ب = ١٠ سم ، ب حـ = ٢٢ سم ، طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{م ب}$ على $\overline{ء حـ}$ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١١) أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها = ٤٤ سم ، حجمها = ٣٨٥٠ سم^{٣} أوجد إرتفاعها ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^{٣} و ارتفاعها ٢٤ سم
أوجد مساحتها الكلية (π = ٣,١٤)

(١٣) أيهما أكبر حجماً أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم و ارتفاعها ١٠ سم أم مكعب طول حرفه ١١ سم ؟
($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٤) قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١١ سم و ارتفاعها ١٠,٥ سم صهرت و حولت إلى ٣ مكعبات متساوية الحجم أوجد طول حرف المكعب الواحد
($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(١٥) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها و حجمها يساوى ٢٧ π سم^{٣} أوجد مساحتها الجانبية بدلالة π

أحمد الشتوى

الكرة :



هى مجسم سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة) إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها هو مركز الكرة ، و طول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة (نق)

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة

(١٦) كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم^{٢} أوجد حجمها (π = ٣,١٤)

(١٧) كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم صهرت و حولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم أوجد ارتفاع الأسطوانة

(١٨) متوازى مستطيلات من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ ، ٢٤ ، ٢١ سم شكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطر الكرة (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

أحمد الشتوى

(١٩) كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وضعت داخل مكعب فمست أوجهه الستة
أوجد مساحة سطح الكرة ثم أوجد حجم المكعب

(٢٠) كرة معدنية جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى و الخارجى ٢,١ سم ، ٣,٥ سم على الترتيب أوجد كتلتها علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جرام ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٢١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] حجم الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[٣]{٣}$ سم يساوى .... سم^{٣}
(٤ π ، ٤ $\sqrt{٣}$ π ، $\frac{٤}{٣}$ π ، $\frac{٩}{٤}$ π)

[٢] طول نصف قطر الكرة التى مساحتها ٩ π سم^{٢} يساوى .... سم
(٩ ، ٦ ، ٣ ، ١,٥)

[٣] المساحة الكلية لمكعب حجمه ٨ سم^{٣} تساوى .... سم^{٢}
(٢ ، ٤ ، ١٦ ، ٢٤)

[٤] طول نصف قطر دائرة مساحتها ٢ π سم^{٢} يساوى .... سم
(١ ، ٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ٤)

[٥] إرتفاع متوازى المستطيلات الذى مساحته الجانبية ٢٤٠ سم^{٢} و قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم يساوى .... سم
(١٠ ، ٦ ، ٥ ، ٣)

[٦] إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها نق هى ٨ π نق سم^{٢} فإن ارتفاعها = ... سم
(٨ ، ٤ ، ١٠ ، ١٦)

للأمانة العلمية
يرجى عدم حذف أسمى نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أى تعديل

أحمد الشتنوى

الدرس الحادى عشر : حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

١) المعادلة هى :

جملة رياضية تحتوى على متغير أو أكثر و تحتوى علاقة التساوى بين عبارتين رياضيتين

فمثلاً :

الجملة الرياضية : س – ١ = ٧ تسمى معادلة حيث :

تحتوى على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوى (=)

بين العبارتين (س – ١) بالطرف الأيمن ، (٧) بالطرف الأيسر

٢) درجة المعادلة هى :

أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المعادلة

فمثلاً :

المعادلة : ٢ س – ١ = ٧ من الدرجة الأولى ،

المعادلة : $س^{٢}$ + ٥ = ٩ من الدرجة الثانية ، .... و هكذا

٣) حل المعادلة هو :

إيجاد قيمة المتغير (المجهول) التى تحقق تساوى طرفى المعادلة

٤) مجموعة حل المعادلة :

هى المجموعة التى تحقق عناصرها المعادلة

ملاحظة :

فى حالة المعادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد : للمجهول قيمة واحدة

٥) خواص علاقة التساوى :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية فإن :

١] إذا كان : س = ص فإن : س ± ع = ص ± ع

٢] إذا كان : س = ص فإن : س × ع = ص × ع

٣] إذا كان : س × ع = ص × ع فإن : س = ص ، ع ≠ ٠ .

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح :

١) ٢ س – ١ = ٧ بإضافة (١) للطرفين ينتج :

٢ س = ٨ بقسمة طرفى المعادلة على (١) ينتج :

س = ٤ ∴ مجموعة الحل = { ٤ }

ملاحظة :

يمكن ضرب طرفى المعادلة : ٢ س = ٨ فى المعكوس الضربى لمعامل س و هو $\frac{١}{٢}$ كما يلى :

$\frac{١}{٢}$ × ٢ س = $\frac{١}{٢}$ × ٨ ∴ س = ٤

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



٢) $\sqrt{٥}$ س + ١ = ٦ بإضافة (– ١) للطرفين ينتج :

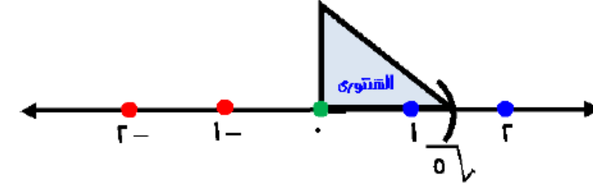
$\sqrt{٥}$ س = ٥ بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ينتج :

$س = \frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \sqrt{٥}$

أحمد الشنتورى

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt{٥}$ }

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى



(١) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣ س + ٧ = ١

[٢] س + ٤ = ٤

[٣] س + ٢ = ٠

[٤] $\sqrt{٣}$ س − ٢ = ١

[٥] س − ١ = $\sqrt{٢}$

[٦] ٧ س − $\sqrt{٧}$ = ٦ $\sqrt{٧}$

أحمد الشتوى

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

١) المتباينة :

هى جملة رياضية تتضمن علامة التباين بين عبارتين رياضيتين

ملاحظة :

علامات التباين هى :

< : أكبر من ، > : أقل من

⩽ : أكبر من أو يساوى ، ⩾ : أقل من أو يساوى

فمثلاً :

الجملة الرياضية : س – ١ > ٧ تسمى متباينة حيث :
تحتوى على المتغير أو المجهول (س) ، علاقة التساوى (>)
بين العبارتين (س – ١) بالطرف الأيمن ، (٧) بالطرف الأيسر

٢) درجة المتباينة هى :

أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المتباينة

فمثلاً :

المتباينة : ٢ س – ١ < ٧ من الدرجة الأولى ،

المتباينة : $س^{٢}$ + ٥ ⩾ ٩ من الدرجة الثانية ، .... و هكذا

٣) حل المتباينة هو :

إيجاد قيم المتغير (المجهول) التى تحقق تساوى طرفى المعادلة

٤) مجموعة حل المعادلة :

هى مجموعة العناصر التى يحقق كل منها المتباينة
و تكتب فى صورة فترة

ملاحظة : فى حالة المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد :
للمجهول قيمة واحدة أو أكثر

٥) خواص علاقة التباين :

إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية و كان س > ص فإن :

١] س + ع > ص + ع
سواء كانت ع موجبة أو سالبة (خاصية الإضافة)

٢] إذا كان : ع > ٠ فإن : س × ع > ص × ع
خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب

٣] إذا كان : ع < ٠ فإن : س × ع > ص × ع
خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب

أى أن : عند ضرب (أو قسمة) طرفى المتباينة فى (على) عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين

ملاحظة :

يمكن استنتاج خواص علاقة التباين السابقة فى جميع علاقات التباين : > أو < أو ≤ أو ≥

كيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح :

١) ٣ س + ١٠ > ١ بإضافة (– ١٠) للطرفين

٣ س > – ٩

بضرب طرفى المتباينة فى ($\frac{١}{٣}$ > ٠) ينتج :

س > – ١ ∴ مجموعة الحل =] – ∞ ، – ١ [

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



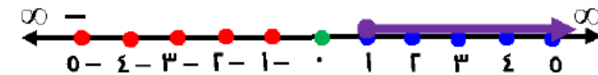
٢) ٣ − ٢س ⩾ ١   بإضافة (− ٣) للطرفين

− ٢س ⩾ − ٢

بضرب طرفى المتباينة فى (− ½ < ٠) ينتج :

س ⩽ ١   ∴ مجموعة الحل = [١ ، ∞ [

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



٣) − ٥ < ٣س − ٢ ⩾ ٧   بإضافة (٢) للأطراف

− ٣ < ٣س ⩾ ٩   بالضرب فى (⅓ > ٠) ينتج :

− ١ < س ⩾ ٣   ∴ مجموعة الحل =] − ١ ، ٣]

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



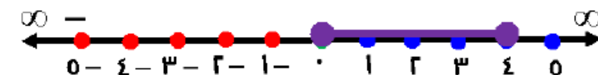
٤) س + ٢ ⩾ ٣س + ٢ ⩾ س + ٨   بإضافة (− س)

٢ ⩾ ٢س + ٢ ⩾ ٨   بإضافة (− ٢)

٠ ⩾ ٢س ⩾ ٨   بالضرب فى (½ > ٠)

٠ ⩾ س ⩾ ٤   ∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٤]

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل التالى :



أحمد الشنتورى

(٢) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية و مثل الحل على خط الأعداد :

[١] ٣س − ٢ > ١

[٢] ٥ − ٤س ⩽ − ٣

[٣] − ٣ < ٢س − ١ ⩾ ٥

[٤] ½ س + ١ ⩾ ٢

[٥] س − ٢ ⩾ ٣س − ٥

[٦] س − ١ ⩾ ٣س − ٣ ⩾ س + ٥

[٧] |− ٢| > ٣س − ١ ⩾ ٨

[٨] ∛− ٨ > س + ١ ⩾ √٩

أحمد الشتورى

(٣) إذا كانت : [٤ ، ٧] هى مجموعة حل المتباينة :
أ ⩾ س − ٣ ⩾ ب أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٤) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة حل المعادلة : ٢ س − ٣ = ٧ فى ح هى ....

(∅ ، {٥} ، {١٠} ، {٤})

[٢] مجموعة حل المعادلة : √٢ س = ٤ فى ح هى ....

(∅ ، {٤√٢} ، {٢√٢} ، {√٢})

[٣] مجموعة حل المعادلة : س − √٣ = √٣ فى ح هى ....

(∅ ، {صفر} ، {٢√٣} ، {√٣})

[٤] مجموعة حل المتباينة : س < ٧ فى ح هى ....

([٧ ، ∞[،]٧ ، ∞[،]−∞ ، ٧] ،]−∞ ، ٧[ )

[٥] مجموعة حل المتباينة : −١ < − س ≤ ١ فى ح هى ....

( ]−١ ، ١[،]−١ ، ١] ، [−١ ، ١] ، [−١ ، ١[ )

[٦] مجموعة حل المتباينة : −١ ≤ س − ١ ≤ ١ فى ح هى ....

([−١ ، ١] ، [٠ ، ٢] ، [٠ ، ١] ، [−١ ، ٢])

[٧] إذا كان : −٢ < س < ٢ فإن : ٢ س + ٣ ∈ ....

( ]−١ ، ٧[،]−١ ، ٥[،]−٤ ، ٦[، [−١ ، ٧])

[٨] العدد : ٢ ∈ مجموعة حل المتباينة ....

(س < ٢ ، س > ٢ ، − س ≤ −٢ ، − س ≥ ٢)

[٩] إذا كان : س ∈ [−٢ ، ∞[

فإن : العبارة تمثل المتباينة ....

(س ≤ −٢ ، س ≥ −٢ ، س < −٢ ، س > −٢)

(٥) أكمل ما يلى لتحصل على عبارة صحيحة حيث س ∈ ح :

[١] إذا كان : س + ٥ = ١١ فإن : ٦ س = ...

[٢] إذا كان : ٣ س = ٦ فإن : س + ٦ = ...

[٣] إذا كان : ٢ س − ١ = ٧ فإن : $\frac{1}{2}$ س = ...

[٤] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : س + ك = ٤ هى {٣}

فإن : ك = ...

[٥] إذا كانت مجموعة حل المعادلة : ٣ س + ٢ ك = ٥ هى {١} فإن : ك = ...

[٦] مجموعة حل المعادلة : س + ... = ٧ هى {−٢}

[٧] مجموعة حل المتباينة : س < ٣ هى ....

[٨] مجموعة حل المتباينة : س ≥ ١ هى ....

[٩] مجموعة حل المتباينتين : س < ٣ ، س ≥ ١ معاً هى ....

[١٠] إذا كان : أ < ب فإن : أ − ٣ .... ب − ٣

[١١] إذا كان : أ < ب ، س = −٣ فإن : أ س .... ب س

[١٢] إذا كان : أ < ب ، س = ٣ فإن : أ س .... ب س

[١٣] إذا كان : −١ < س < ١ فإن : ٢ س + ١ ∈] .... [

أحمد الشنتورى

الوحدة الثانية العلاقة بين متغيرين

الدرس الأول : العلاقة بين متغيرين

تمهيد :
أشترى محمد كراسات و أقلام فإذا كان ثمن الكراسة ستة جنيهات ، و ثمن القلم أربعة جنيهات ، ودفع للبائع ٥٠ جنيهاً فما هى الإمكانات المختلفة لعدد الأقلام و الكراسات التى أشتراها محمد ؟
لدراسة الإمكانات المختلفة
نفرض أن : عدد الأقلام = س ، عدد الكراسات = ص
∴ ٦ س + ٤ ص = ٥٠
تسمى هذه العلاقة : معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين
يمكن قسمة طرفى المعادلة على ٢ فنحصل على معادلة مكافئة لها و هى : ٣ س + ٢ ص = ٢٥ و يمكن كتابتها على الصورة :
٢ ص = ٢٥ − ٣ س أى أن : ص = $\frac{٢٥ - ٣ س}{٢}$

لاحظ أن :
س ، ص أعداد طبيعية
و في هذه الحالة تكون س عدداً فردياً
يمكن تكوين الجدول المقابل لمعرفة الإمكانات المختلفة

س	ص	(س ، ص)
١	١١	(١ ، ١١)
٣	٨	(٣ ، ٨)
٥	٥	(٥ ، ٥)
٧	٢	(٧ ، ٢)
٩	سالبة	لا تصلح

أحمد الشتوى

(١) مع مؤمن أوراق مالية فئة ٥ جنيهات ، و أوراق مالية فئة ٢٠ جنيهاً أشترى مؤمن من مركز تجارى بما قيمته ٨٥ جنيهاً ، ما الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه ؟

(٢) مثلث متساوى الساقين محيطه ١٩ سم ، ما الإمكانات المختلفة لأطوال أضلاعه ، علماً بأن أطوال أضلاعه ∈ ص+
تذكر : مجموع طولى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث

دراسة العلاقة بين متغيرين

العلاقة : ٩ س + ب ص = حـ حيث : ٩ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ، و يمكن
إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) تحقق هذه العلاقة
فمثلاً :
لدراسة العلاقة : ٣ س + ص = ٢
نوجد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س و إيجاد قيمة ص المناظرة
أو العكس كما يلى :

بوضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ص = ٢
∴ ص = ٢ ∴ (٠ ، ٢) يحقق العلاقة
بوضع س = ١ ∴ ٣ × ١ + ص = ٢
∴ ص = – ١ ∴ (١ ، – ١) يحقق العلاقة
بوضع س = – ١ ∴ ٣ × – ١ + ص = ٢
∴ ص = ٥ ∴ (– ١ ، ٥) يحقق العلاقة

و هكذا نجد أن هناك عدداً لا نهائى من الأزواج المرتبة (س ، ص)
التى تحقق هذه العلاقة

ملاحظة :
يمكن كتابة العلاقة : ٣ س + ص = ٢ كما يلى :
ص = ٢ – ٣ س أى : وضع أحد المتغيرين فى طرف مستقل
ثم إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق هذه العلاقة

(٣) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات التالية :

[أ] س – ٢ ص = ٥

[ب] ٢ س + ٥ ص = ١٠

(٤) بين أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س − ص = ١
كما بالمثال :
مثال : (١ ، ١)
نضع : س = ١ ، ص = ١
∴ ٢ س − ص = ٢ × ١ − ١ = ٢ − ١ = ١
∴ (١ ، ١) يحقق العلاقة
[١] (٥ ، ٣)
[٢] (٣ ، ٥)
[٣] (− ٢ ، − ٥)

(٥) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : (− ٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ١
فإن : ك = ...
[٧ ، − ٧ ، ٥ ، − ٥]

[٢] إذا كان : (٢ ، − ٥) يحقق العلاقة : ٣ س − ص + ك = ٠
فإن : ك = ...
[١ ، − ١ ، ١١ ، − ١١]

[٣] إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س − ص = ٦
فإن : ك = ...
[١ ، ٢ ، −١ ، − ٢]

[٤] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥
هو ....
[(− ١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، − ٣)]

[٥] الزوج المرتب الذى يحقق العلاقتين : س + ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٧ معاً هو ....
[(− ٢ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، −٣)]

[٦] الجدول التالى يبين العلاقة بين س ، ص و هى ....

س	٣	٤	٥
ص	١٠	١٣	١٦

[ص = س + ٧ ، ص = س − ٧ ، ص = ٣ س + ١ ، ص = س + ١]

التمثيل البيانى للعلاقة بين متغيرين

العلاقة : أ س + ب ص = حـ حيث : أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص و يمثلها بيانياً خط مستقيم

فمثلاً :

لتمثيل العلاقة : ٣ س + ص = ٢ بيانياً

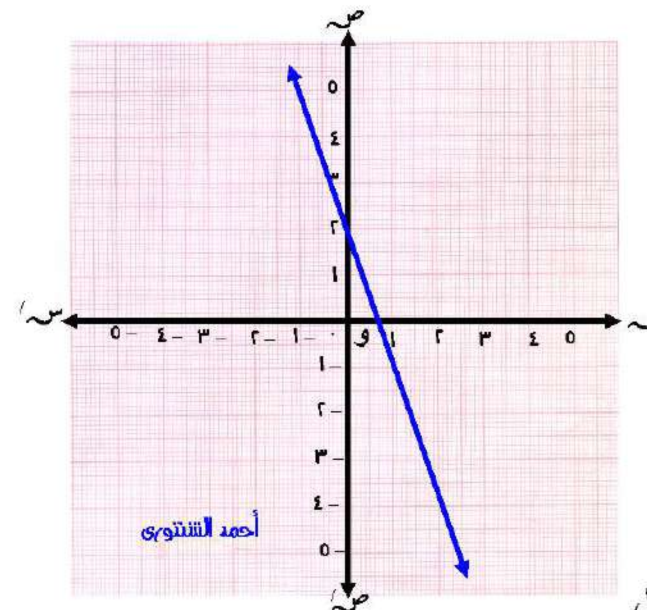
نوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة كما سبق و يمكن وضعها فى جدول كالتالى :

س	٠	١	– ١
ص	٢	– ١	٥

و نعين فى النظام الإحداثى المتعامد النقط التى تمثل الأزواج المرتبة : (٠ ، ٢) ، (١ ، – ١) ، (– ١ ، ٥)

و نرسم الخط المستقيم المار بها فيكون هو التمثيل البيانى لهذه العلاقة

(الخط المستقيم باللون الأزرق يمثل العلاقة)



لاحظ أن :

جميع نقط المستقيم الممثل للعلاقة تعين أزواج مرتبة تحقق هذه العلاقة

حالات خاصة :

١) إذا كان : أ = ٠ .

فتصبح العلاقة على الصورة :

ب ص = حـ

فمثلاً :

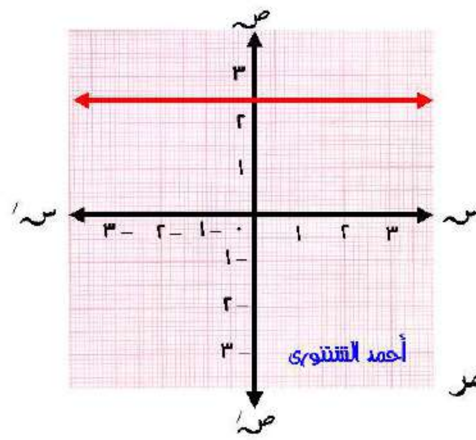
العلاقة : ٢ ص = ٣

أى : ص = $\frac{٣}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر

و هو يمر بالنقطة (٠ ، $\frac{٣}{٢}$)

و يكون موازياً لمحور السينات



ملاحظة : العلاقة : ص = ٠ يمثلها محور السينات

٢) إذا كان : ب = ٠ .

فتصبح العلاقة على الصورة :

أ س = حـ

فمثلاً :

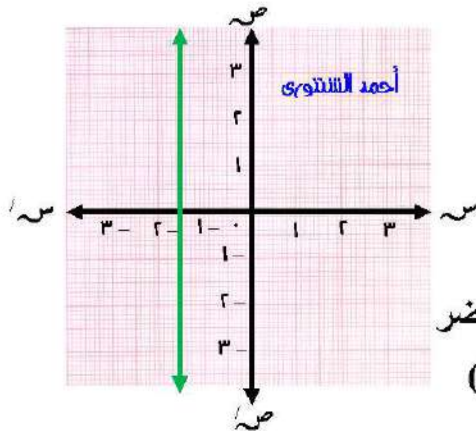
العلاقة : ٢ س = – ١

أى : ص = – $\frac{١}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأخضر

و هو يمر بالنقطة (– $\frac{١}{٢}$ ، ٠)

و يكون موازياً لمحور الصادات



ملاحظة : العلاقة : س = ٠ يمثلها محور الصادات

٣) إذا كان : حـ = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

أ س + ب ص = ٠

فمثلاً :

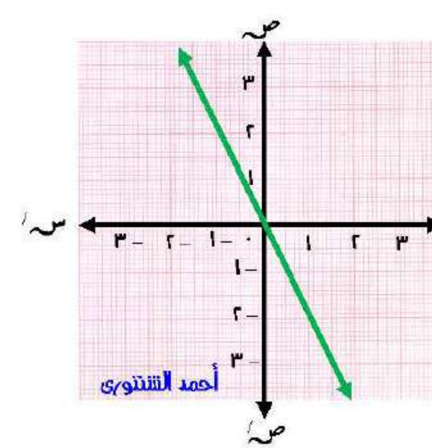
العلاقة : ٢ س + ص = ٠

أى : ص = − ٢ س

يمثلها الخط المستقيم باللون البنى

و هو يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

كما بالشكل المقابل :



س	٠	١	− ١
ص	٠	− ٢	٢

(٦) مثل بيانياً العلاقة : ٢ س − ص = ٣

بوضع س = ... ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ... ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

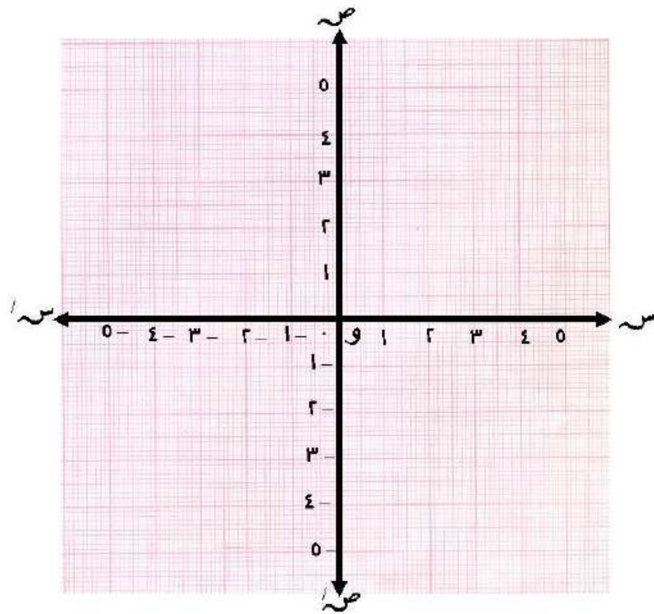
بوضع س = ... ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ... ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

بوضع س = ... ∴ ٢ × .... − ص = ٣

∴ ص = ... ∴ (.... ، ....) يحقق العلاقة

س			
ص			



ملاحظات :

١) يمكن تكوين الجدول مباشرة

٢) يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم الممثل للعلاقة :

أ س + ب ص = حـ مع محور السينات بوضع : ص = ٠

، و مع محور الصادات بوضع : س = ٠

فمثلاً : العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦

بوضع : ص = ٠ ينتج : س = ٣

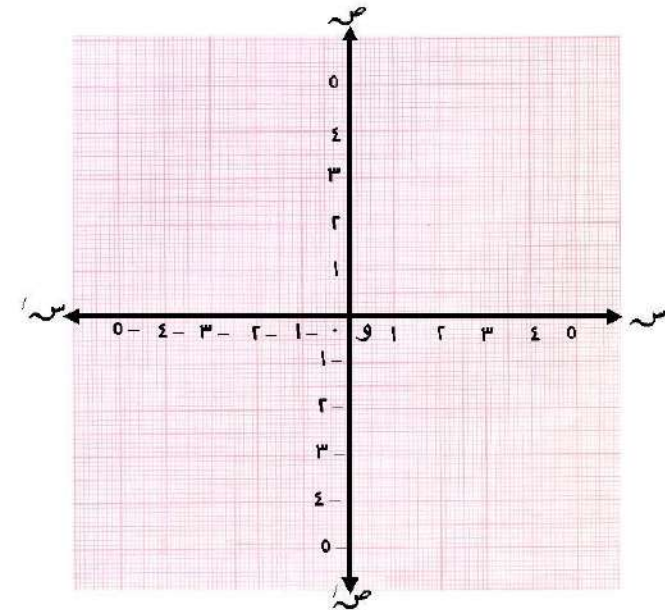
∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هى (٣ ، ٠)

بوضع : س = ٠ ينتج : ص = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هى (٠ ، ٢)

(٧) أوجد نقط تقاطع المستقيم : ٢ س − ص = ٤ مع محورى الإحداثيات ثم أرسم هذا المستقيم

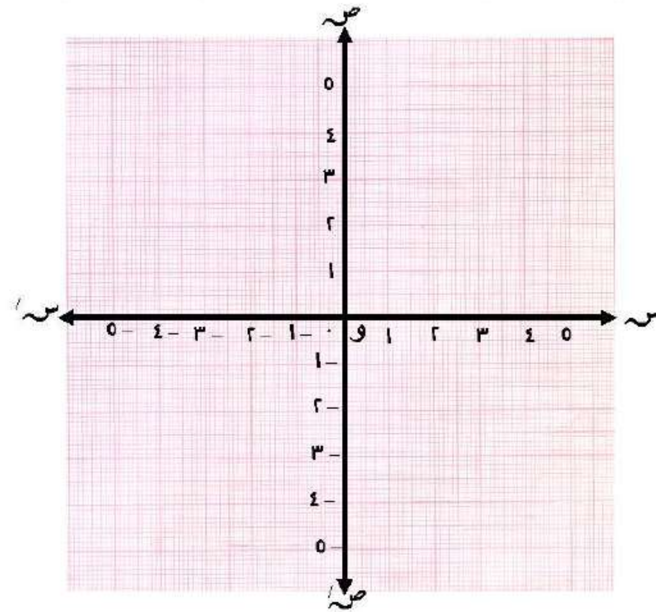
س	٠	....	....
ص	....	٠	....



(٨) إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س − ص = ك يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، م) أوجد قيمة كل من : ك ، م

(٩) ارسم المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦ ، و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ‌أ ، و يقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و ‌أ ب حيث (و) نقطة الأصل

س	٠	....	....
ص	....	٠	....



أحمد الشتورى

الدرس الثانى : ميل الخط المستقيم و تطبيقات حياتية

تمهيد :

إذا تحركت نقطة على خط مستقيم ل من الموضع أ ($س_١$ ، $ص_١$) إلى الموضع ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) حيث : $س_٢ > س_١$ ، و كل من أ ، ب ∈ المستقيم ل فإن :

١) التغير فى الإحداثى السينى = $س_٢ - س_١$

و يسمى بالتغير الأفقى

٢) التغير فى الإحداثى الصادى = $ص_٢ - ص_١$

و يسمى بالتغير الرأسى

(من الممكن أن يكون موجباً أو سالباً أو مساوياً الصفر)

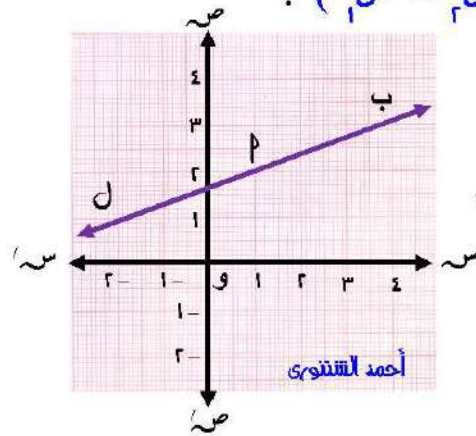
٣) النسبة بين التغير فى الإحداثى الصادى و التغير فى الإحداثى السينى تسمى ميل الخط المستقيم و يرمز له بالرمز (م)

مما سبق نستنتج :

ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث : $س_٢ > س_١$

الحالات المختلفة للتغير الرأسى ($ص_٢ - ص_١$) :



[١] إذا كانت : أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٣) فإن :

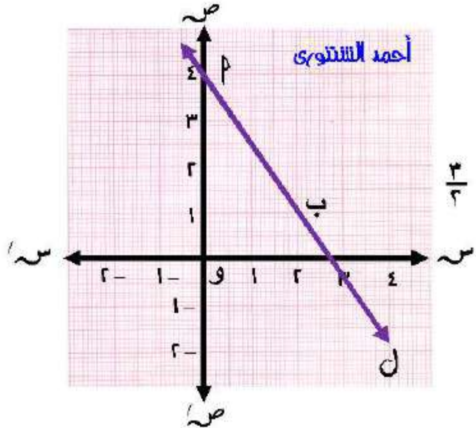
ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣ - ٢}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$

نلاحظ :

١) تحركت نقطة أ على الخط المستقيم لأعلى لتصل إلى نقطة ب

٢) $ص_٢ > ص_١$ أى أن : ص تزداد بزيادة س

٣) ميل المستقيم = عدد موجب (م > ٠)



[٢] إذا كانت : أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ١) فإن :

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٠} = -\frac{٣}{٢}$

نلاحظ :

١) تحركت نقطة أ على الخط المستقيم لأسفل لتصل إلى نقطة ب

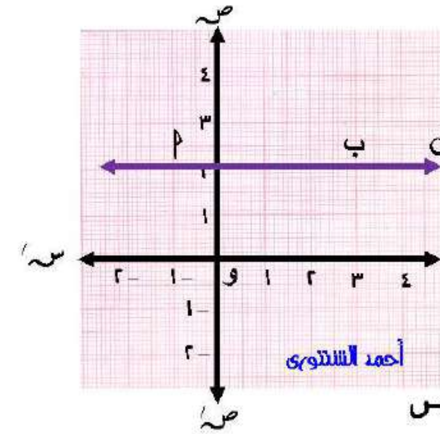
٢) $ص_٢ < ص_١$ أى أن : ص تقل بزيادة س

٣) ميل المستقيم = عدد سالب (م < ٠)

[٣] إذا كانت : أ (– ١ ، ٢) ،
ب (٣ ، ٢) فإن :

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢ - ٢}{٣ -(– ١)}$

= $\frac{٠}{٤}$ = صفر



نلاحظ : ١) تحركت نقطة أ أفقياً لتصل إلى نقطة ب

٢) $ص_{٢} = ص_{١}$

أى أن : ص ثابتة بتغير س

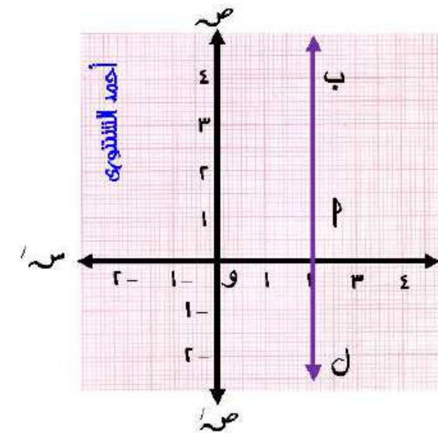
٣) ميل المستقيم = ٠ (م = ٠)

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ٠

[٤] إذا كانت : أ (٢ ، ١) ،
ب (٢ ، ٤) فإن :

لا يمكن حساب الميل لأن تعريف الميل يشترط وجود تغير فى الإحداثى السينى

أى : $س_{٢} - س_{١} \neq ٠$



نلاحظ : ١) تحركت نقطة أ رأسياً لتصل إلى نقطة ب

٢) $س_{٢} = س_{١}$

٣) ميل المستقيم غير معرف

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

أحمد الشتوى

(١) أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل نقطتين مما يلى :

[١] أ (١ ، ١) ، ب (٤ ، ٢)

[٢] أ (٣ ، – ٥) ، ب (٦ ، – ٥)

[٣] أ (– ٢ ، ٢) ، نقطة الأصل

[٤] أ (– ١ ، – ٣) ، ب (– ٢ ، – ٤)

(٢) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ١) ، (س ، ٦) يساوى ٥ أوجد قيمة : س

(٣) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ص) ، (–١ ، ٠) يساوى $\frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة : ص

(٤) إذا كان : ميل المستقيم المار بالنقط (٣ ، –١) ، (س ، ١) ، (٩ ، ص) يساوى $\frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة كل من : س ، ص

(٥) إذا كان : أ (٢ ، –١) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٥) أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ثم أذكر ماذا تلاحظ ؟

أحمد الشتوري

(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك) يوازى محور السينات أوجد قيمة : ك

(٧) أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، – ١) ، (٢ ، ١) يساوى ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (– ٢ ، – ٧)

(٨) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث : أ (– ١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ثم بين ما إذا كانت النقطة حـ (٨ ، ١) تقع على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أم لا ؟

(٩) فى الشكل المقابل :

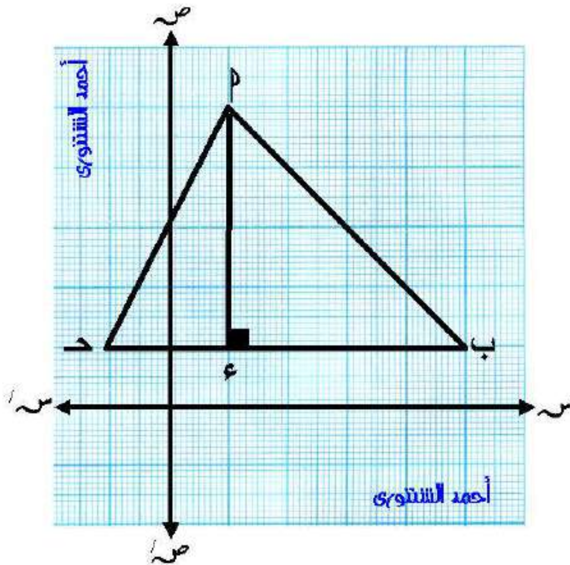
أ ب حـ مثلث ، أكمل باستخدام أحد الكلمات : (موجب ، سالب ، صفر ، غير معرف)

[١] ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ....

[٢] ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ....

[٣] ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ....

[٤] ميل $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ....



أحمد الشنتورى

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم :

نعلم أن :

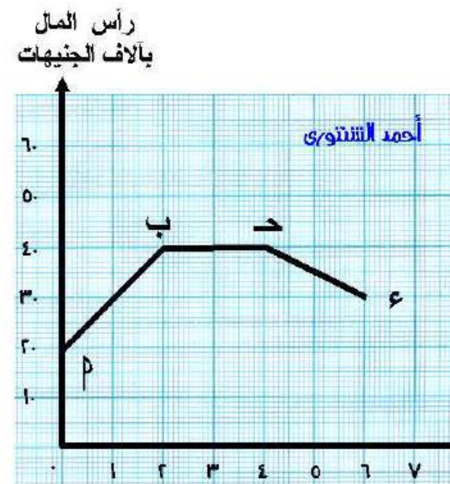
إذا كانت هناك علاقة خطية بين متغيرين س ، ص فإن :

ميل الخط المستقيم الذى يمثل هذه العلاقة = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$

أى أن : ميل الخط المستقيم (م) يعبر عن معدل التغير فى ص بالنسبة إلى س

و يوجد فى حياتنا العديد من التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين و التى نحتاج فيها لمعرفة معدل التغير مثل :
التغير فى حركة سيارة أو دراجة – التغير فى استهلاك الوقود –
التغير فى رأس مال أحدى الشركات .... الخ

تطبيق (١) : الشكل المقابل يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٦ سنوات و منه نلاحظ :



١) م = (٠ ، ٢٠) ، ب = (٢ ، ٤٠) ، حـ = (٤ ، ٤٠) ، ء = (٦ ، ٣٠)

٢) ميل $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ = $\frac{٤٠ - ٢٠}{٢ - ٠}$ = ١٠

و هو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال أول سنتين بمعدل ١٠ آلاف جنيه
(أى : ١٠ آلاف جنيه لكل سنة)

٣) ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{٤٠ - ٤٠}{٤ - ٢}$ = صفر و هو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً خلال السنتين الثالثة و الرابعة

٤) ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{٦ - ٤}$ = – ٥ و هو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه
(أى : ٥ آلاف جنيه لكل سنة)

٥) رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند م = ٢٠ ألف جنيه

ملاحظات :

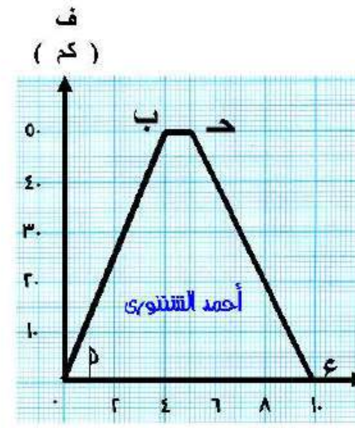
(١) إذا كان : الميل موجب فإن : معدل التغير يتزايد
(٢) إذا كان : الميل سالب فإن : معدل التغير يتناقص
(٣) إذا كان : الميل = صفر فإن : معدل التغير ثابت
(٤) تمثل العلاقة بين المتغيرين فى الربع الأول على الشبكة التربيعية المتعامدة
(٥) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور الصادات فى النقطة (٠ ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة الإبتدائية (الصغرى) للمتغير ص
(٦) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور الصادات فى النقطة (٠ ، ص) فإن : ص تعبر عن القيمة النهائية (العظمى) للمتغير ص

أحمد الشتوى

(٧) إذا كان الميل موجب و قطع المستقيم محور السينات فى النقطة (ـس ، ٠) فإن : ـس تعبر عن القيمة الإبتدائية (الصغرى) للمتغير ـس

(٨) إذا كان الميل سالب و قطع المستقيم محور السينات فى النقطة (ـس ، ٠) فإن : ـس تعبر عن القيمة النهائية (العظمى) للمتغير ـس

تطبيق (٢) : الشكل المقابل :



يوضح حركة دراجة حيث الزمن ن بالساعة ، و المسافة ف بالكيلو متر بين مدينتين ذهاباً و عودة و منه نلاحظ :

[١] م = (٠ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٥٠) ، حـ = (٦ ، ٥٠) ، ء = (١٠ ، ٠)

[٢] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة الذهاب = ميل $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

$= \frac{٥٠ - ٠}{٤ - ٠} = ١٢,٥$ كم / س

[٣] السرعة المنتظمة للدراجة خلال رحلة العودة = ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

$= \frac{٠ - ٥٠}{١٠ - ٥} = - ١٠$ كم / س

و الإشارة السالبة تعنى أن الدراجة تتحرك فى عكس إتجاه حركتها الأولى بسرعة ١٠ كم / س

[٤] القطعة المستقيمة الأفقية تبين توقف الدراجة لمدة ساعة بعد أن تحركت مسافة ٥٠ كم ، ثم تبدأ رحلة العودة

[٥] المسافة الكلية = ١٠٠ كم ، و الزمن الكلى = ١٠ ث

[٦] السرعة المتوسطة للدراجة خلال الرحلة كلها = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

$= \frac{١٠٠}{١٠} = ١٠$ كم / س

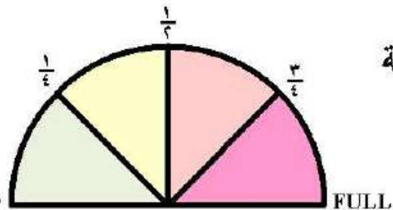
ملاحظات :

(١) إذا كانت السيارة أو الدراجة أو .... تقطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية فإنها تتحرك بسرعة منتظمة و الذى يحددها ميل المستقيم الذى يمثل العلاقة بين السرعة و الزمن أى أن :
السرعة المنتظمة للسيارة (ع) = معدل التغير فى المسافة (ف) بالنسبة للزمن (ن) = ميل المستقيم (م)
، و إذا كانت هذه العلاقة لا تمثل خط مستقيم واحد بل عدة قطع مستقيمة فإن :

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

تطبيق (٣) :

ملأ شخص خزان سيارته بالوقود و سعة هذا الخزان ٤٠ لتراً و بعد أن تحرك ١٢٠ كم وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ الخزان



لرسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان و المسافة التى قطعتها السيارة

حيث العلاقة خطية نلاحظ أن :

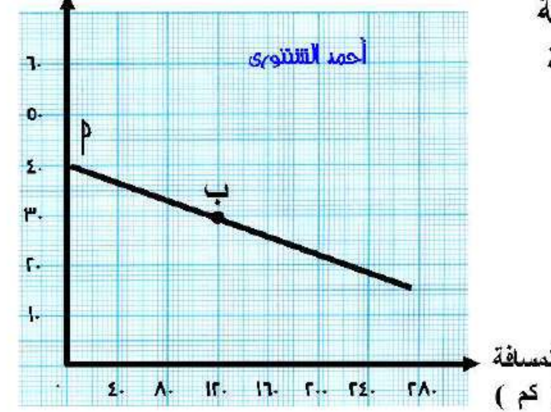
١) عند البدء : أ = (٠ ، ٤٠)

أى أن : المسافة المقطوعة (ف) = ٠ كم ، و كمية الوقود المتبقية = ٤٠ لتراً

٢) بعد قطع مسافة ١٢٠ كم

: ب = (١٢٠ ، ٣٠)

أى أن : ف = ١٢٠ كم ، و كمية الوقود المتبقية = ٣٠ لتراً



و يكون : ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{١٢٠ - ٠}$ = $-\frac{١}{١٢}$

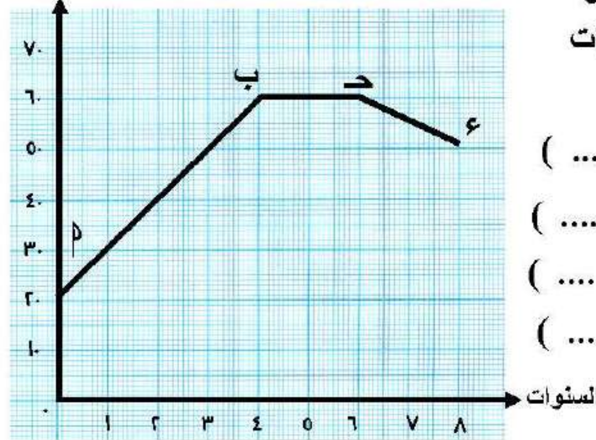
و هذا يعنى أن كمية الوقود تتناقص بمعدل لتر واحد كل ١٢ ساعة

٣) يفرغ الخزان عندما تقطع السيارة مسافة = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}}$

= $\frac{٤٠}{\frac{١}{١٢}}$ = ٤٨٠ كم

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطع المحور الأفقى (محور المسافة) فى النقطة (٤٨٠ ، ٠)

١) الشكل المقابل : يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات أكمل ما يلى :



[١] أ = (.... ، ....)

ب = (.... ، ....)

حـ = (.... ، ....)

ء = (.... ، ....)

[٢] ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

و هو يعبر عن ....

[٣] ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

و هو يعبر عن ....

[٤] ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

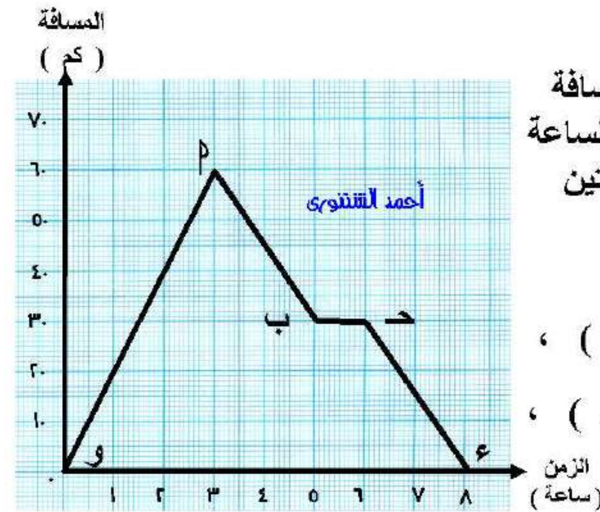
و هو يعبر عن ....

[٥] رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند ....

= .... ألف جنيه

أحمد الشتورى

(٢) الشكل المقابل :
يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلو متر و الزمن بالساعة لحركة سيارة بين مدينتين ذهاباً و عودة
أكمل ما يلى :



[١] ؍ = (.... ، ....) ،
ب = (.... ، ....) ،
حـ = (.... ، ....) ،
ء = (.... ، ....)

[٢] السرعة المنتظمة للسيارة خلال رحلة الذهاب = ميل ؍ب = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ... كم / س

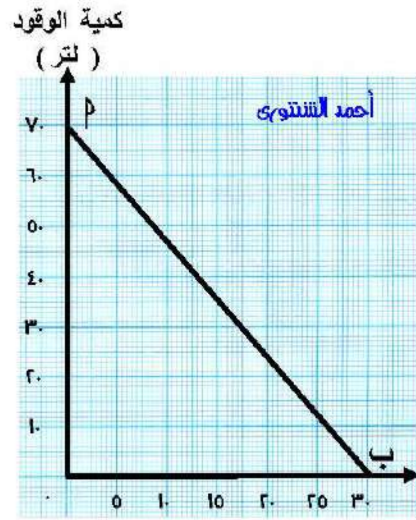
[٣] المسافة الكلية خلال رحلة العودة = ... كم

[٤] الزمن الكلى خلال رحلة العودة = ... ساعة

[٥] سرعة المتوسطة للسيارة خلال رحلة العودة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$ = $\frac{....}{....}$ = ... كم / س

[٦] القطعة المستقيمة الأفقية بالشكل تدل على ....

(٣) ملأ محمد خزان سيارته بالوقود الشكل المقابل يمثل العلاقة بين العلاقة بين الزمن بالساعة و كمية الوقود المتبقية باللتر
أكمل ما يلى :



[١] أكبر سعة للخزان = ... لتر

[٢] يفرغ الخزان بعد مرور .... ساعة

[٣] بعد مرور ١٥ ساعة يتبقى بالخزان .... لتر

[٤] يتبقى بالخزان ١٠ لتر بعد مرور .... ساعة

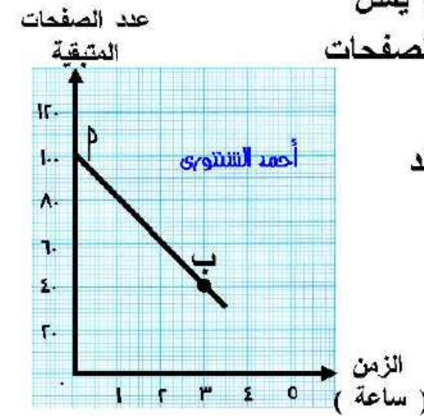
[٥] ؍ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....)

[٦] ميل ؍ب = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٧] معدل استهلاك الوقود فى الساعة الواحدة = ... لتر / ساعة

أحمد الشتوى

(٤) تقرأ سهير كتاب ، و الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن بالساعة و عدد الصفحات المتبقية أكمل ما يلى :



[١] عدد صفحات الكتاب المتبقية عند بداية القراءة = ... صفحة

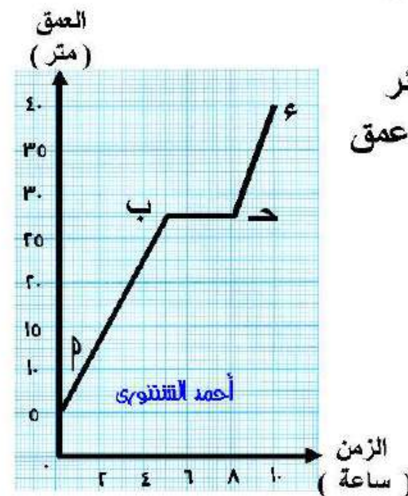
[٢] ٲ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....)

[٣] ميل $\overleftrightarrow{ٲب}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٤] معدل الصفحات المقروءة فى الساعة الواحدة = ... صفحة / ساعة و يعنى ....

[٥] تنهى سهير قراءة الكتاب بعد .... ساعات

(٥) أستأجر مزارع حفاراً ليستكمل حفر بئر و الشكل المقابل يوضح العلاقة بين عمق البئر بالمتر و الزمن بالساعة أكمل ما يلى :



[١] ٲ = (.... ، ....) ، ب = (.... ، ....) ، حـ = (.... ، ....) ، ء = (.... ، ....)

[٢] عمق البئر قبل بدء عمل الحفار = ... متر

[٣] عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار = ... متر

[٣] الزمن الكلى الذى أستغرقه الحفار فى الحفر = ... ساعات

[٤] ميل $\overleftrightarrow{ٲب}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٨] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الخمس ساعات الأولى = ... متر / ساعة

[٦] ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = $\frac{.... - ....}{.... - ....}$ = ...

[٧] متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعتين الأخيرتين = ... متر / ساعة

(٦) قرأ شخص جزءاً من كتاب عدد صفحاته ٦٠ صفحة فإذا كانت العلاقة التى تربط عدد الصفحات المتبقية (ص) ، و الزمن اللازم لقراءتها (ن) بالدقيقة تتعين بالعلاقة : ص = ٣٠ − $\frac{١}{٢}$ ن

أكمل ما يلى :

[١] عدد الصفحات التى سبق لهذا الشخص قراءتها = ... صفحة

[٢] الزمن اللازم لقراءة بقية الصفحات = ... دقيقة

العمليات على الأعداد الحقيقية

تدريبات

أكمل ما يأتى

(١) المحايد الجمعى فى ح هو صفر

(٢) المحايد الضربى فى ح هو ١

(٣) $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = ٦\sqrt{٥}$

(٤) $\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

(٥) $٦ + ٤\sqrt{٥} = ٦ + ٤\sqrt{٥}$

(٦) $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٧} = ٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٧}$

(٧) $٧\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٥}$
$= ٤\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٥}$

(٨) $٧\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢}$
$= ٩\sqrt[٣]{٢} + ٨\sqrt{٢}$

(٩) المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})$

$= -(\sqrt{٢} - \sqrt{٥}) = -\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$
$= \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

(١٠) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢٥} = ٥$

(١١) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٣٥}$

(١٢) $-٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٢} = -٦\sqrt{١٠}$

(١٣) $٤ \times \sqrt{٧} = ٤\sqrt{٧}$

(١٤) $-٢\sqrt[٣]{٥} \times ٣\sqrt[٣]{٢} = -٦\sqrt[٣]{١٠}$

أكتب ما يأتى بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً

$\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}}$ ، $\frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})}{\sqrt{٥}}$

(١) $\frac{٥}{\sqrt{٢}} = \frac{٥ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$

(٢) $\frac{-٥}{\sqrt{٣}} = \frac{-٥ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٣}$

(٣) $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٥}}{١٠}$

(٤) $\frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})}{\sqrt{٥}} = \frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥}) \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$

$= \frac{(\sqrt{١٠} - ٥)}{٥}$

أكمل ما يأتى

(١) $٣\sqrt{٢}\ (٤\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥})$

$= ١٢\sqrt{٦} - ٦\sqrt{١٠}$

(٢) $٣\sqrt{٢}\ (٥\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣})$

$= ٣٠ + ١٢\sqrt{٦}$

(٣) $\sqrt{٧}\ (٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٧})$

$= ٣\sqrt{٢١} - ١٤$

(٤) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{7})$

$=\sqrt{6}-\sqrt{21}-\sqrt{10}+\sqrt{35}$

(٥) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}-2\sqrt{5})$

$=6-4\sqrt{15}-3\sqrt{15}+30$

$=36-7\sqrt{15}$

(٦) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

$=7-\sqrt{14}+\sqrt{14}-2$

$=7-2=5$

(٧) $(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})$

$=45-12\sqrt{10}+12\sqrt{10}-32$

$=45-32=13$

(٨) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$

$=7-2\sqrt{14}+2$

$=9-2\sqrt{14}$

العمليات على الجذور التربيعية

(١) $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

$=\sqrt{2\times4}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(٢) $\sqrt{12}-2\sqrt{3}$

$=\sqrt{3\times4}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$ صفر

(٣) $3\sqrt{50}-2\sqrt{18}+3\sqrt{8}$

$=3\sqrt{2\times25}-2\sqrt{2\times9}+3\sqrt{2\times4}$

$=3\times5\sqrt{2}-2\times3\sqrt{2}+3\times2\sqrt{2}$

$=15\sqrt{2}-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}=15\sqrt{2}$

(٤) $3\sqrt{20}-4\sqrt{80}+2\sqrt{45}$

$=3\sqrt{4\times5}-4\sqrt{5\times16}+2\sqrt{5\times9}$

$=3\times2\sqrt{5}-4\times4\sqrt{5}+2\times3\sqrt{5}$

$=6\sqrt{5}-16\sqrt{5}+6\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$

ضع ما يأتى فى أبسط صورة

(١) $\sqrt{\frac{٥}{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٥}$

(٢) $\sqrt{\frac{١٦}{٣}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

(٣) $\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

(٤) $\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٣ \times ٤} = ٢\sqrt{٣}$

(٥) $٦\sqrt{\frac{١}{٣}} = ٦\sqrt{\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٣}} = ٦\sqrt{\frac{٣}{٩}} = \frac{٦}{٣}\sqrt{٣}$

$= ٢\sqrt{٣}$

(٦) $٦\sqrt{\frac{١}{٣}} = \frac{٦}{٣}\sqrt{١ \times ٣} = ٢\sqrt{٣}$

(٧) $٣\sqrt{\frac{٢}{٥}} = \frac{٣}{٥}\sqrt{٢ \times ٥} = \frac{٣}{٥}\sqrt{١٠}$

(٨) $\sqrt{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣}\sqrt{١ \times ٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

إختصر ما يأتى لأبسط صورة

(١) $(٢ + \sqrt{٣})^{٢} - \sqrt{٤٨}$

$= ٤ + ٤\sqrt{٣} + ٣ - \sqrt{٣ \times ١٦}$

$= ٧ + ٤\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} = ٧$

(٢) $\sqrt{٣٢} - ١٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + \frac{٦}{\sqrt{٢}}$

$= \sqrt{٢ \times ١٦} - \frac{١٢}{٢}\sqrt{١ \times ٢} + \frac{٦\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + \frac{٦\sqrt{٢}}{٢}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

(٣) $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$

$= ٢\sqrt{٥} + \frac{٦}{٣}\sqrt{١ \times ٣} - \sqrt{٣ \times ٤} - \frac{٥}{٥}\sqrt{١ \times ٥}$

$= ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٥} = \sqrt{٥}$

العددان المترافقان

إذا كان أ ،ب عددين نسبيين موجبين فإن $(\sqrt{\text{أ}}+\sqrt{\text{ب}})$ ، $(\sqrt{\text{أ}}-\sqrt{\text{ب}})$ يسميان عددان مترافقان و يعتبر كلاً منهما مرافقاً للآخر و يكون حاصل ضربهما = أ − ب عدد نسبى

تدريبات

(١) أكتب المرافق لكل مما يأتى

(١) $(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})$ **المرافق** $(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})$

(٢) $(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})$ **المرافق** $(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})$

(٣) $(٤\sqrt{٦}-٥\sqrt{٢})$ **المرافق** $(٤\sqrt{٦}+٥\sqrt{٢})$

(٤) $(٧+٣\sqrt{٢})$ **المرافق** $(٧-٣\sqrt{٢})$

(٥) $(\sqrt{٧}-٨)$ **المرافق** $(\sqrt{٧}+٨)$

(٢) أكتب ما يأتى بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

(١) $\frac{٢}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}$

$$\frac{٢}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})} \times \frac{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}$$

$$= \frac{٢(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{٧-٥} \times \frac{٢(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{٢}$$

$$= (\sqrt{٧}+\sqrt{٥})$$

(٣) إذا كانت س = $\frac{٨}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$ **، ص =** $\frac{٢-\sqrt{٣}}{٢+\sqrt{٣}}$

أكتب س ، ص بحيث يكون المقام عدداً نسبياً ثم أوجد س + ص

أولاً يجب تبسيط كلاً من س ، ص بضرب كل منهما فى مرافق مقامه

$$\text{س} = \frac{٨}{(\sqrt{٥}-\sqrt{٣})} \times \frac{(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}$$

$$\text{س} = \frac{٨(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٥-٣} = \frac{٨(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٢}$$

$$\text{س} = ٤(\sqrt{٥}+\sqrt{٣}) = ٤\sqrt{٥}+٤\sqrt{٣}$$

$$\text{ص} = \frac{(٢-\sqrt{٣})}{(٢+\sqrt{٣})} \times \frac{(٢-\sqrt{٣})}{(٢-\sqrt{٣})}$$

$$\text{ص} = \frac{٤-٤\sqrt{٣}+٣}{٤-٣} = \frac{٧-٤\sqrt{٣}}{١}$$

$$\text{ص} = ٧-٤\sqrt{٣}$$

$$\text{س} + \text{ص} = ٤\sqrt{٥}+٤\sqrt{٣}+٧-٤\sqrt{٣}$$

$$= ٤\sqrt{٥}+٧$$

(٤) إذا كانت س = $\frac{٤}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})}$ ، ص = $\sqrt{٧}-\sqrt{٣}$ اثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة

س^٢ ـ ٢ س ص + ص^٢

س = $\frac{٤}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})} \times \frac{(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}$

س = $\frac{٤(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{٧-٣} = \frac{٤(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{٤}$

س = $(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})$ ، ∵ ص = $(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})$

∴ س ، ص مترافقان

س^٢ = $(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})^٢$

= ٧ + ٢$\sqrt{٢١}$ + ٣ = ١٠ + ٢$\sqrt{٢١}$

ص^٢ = $(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})^٢$

= ٧ - ٢$\sqrt{٢١}$ + ٣ = ١٠ - ٢$\sqrt{٢١}$

س ص = $(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})$ $(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})$

= ٧ ـ ٣ = ٤

س^٢ ـ ٢ س ص + ص^٢

= ١٠ + ٢$\sqrt{٢١}$ ـ ٢ × ٤ + ١٠ - ٢$\sqrt{٢١}$

= ٢٠ - ٨ = ١٢

(٥) إذا كانت س = $\sqrt{٧}+\sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{س}$

أوجد قيمة $\frac{س+ص}{س ص}$

ص = $\frac{٢}{س} = \frac{٢}{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}$

ص = $\frac{٢}{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})} \times \frac{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}$

ص = $\frac{٢(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}{٧-٥} = \frac{٢(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}{٢}$

ص = $(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})$

س + ص = $\sqrt{٧}+\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٧}-\sqrt{٥}$ = ٢$\sqrt{٧}$

س ص = $(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})$ $(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})$

= ٧ - ٥ = ٢

$\frac{س+ص}{س ص} = \frac{٢\sqrt{٧}}{٢} = \sqrt{٧}$

العمليات على الجذور التكعيبية

تدريبات

إختصر ما يأتى لأبسط صورة

(١) $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٥} = \sqrt[3]{١٠}$

(٢) $\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{-٤} = -\sqrt[3]{١٢}$

(٣) $\sqrt[3]{٤٠} = \sqrt[3]{٥ \times ٨} = ٢\sqrt[3]{٥}$

(٤) $\sqrt[3]{-٥٤} = -\sqrt[3]{٢ \times ٢٧} = -٣\sqrt[3]{٢}$

(٥) $\sqrt[3]{١٦} - ٢\sqrt[3]{٢٥٠} - ٥\sqrt[3]{-٥٤}$

$= \sqrt[3]{٢ \times ٨} - ٢\sqrt[3]{٢ \times ١٢٥} + ٥\sqrt[3]{٢ \times ٢٧}$

$= ٢\sqrt[3]{٢} - ٢ \times ٥\sqrt[3]{٢} + ٥ \times ٣\sqrt[3]{٢}$

$= ٢\sqrt[3]{٢} - ١٠\sqrt[3]{٢} + ١٥\sqrt[3]{٢}$

$= ٧\sqrt[3]{٢}$

(٦) $\sqrt[3]{٥٤} + ٥\sqrt[3]{١٦} + ٨\sqrt[3]{\frac{-١}{٤}}$

$= \sqrt[3]{٢ \times ٢٧} + ٥\sqrt[3]{٢ \times ٨} - ٨\sqrt[3]{\frac{١ \times ٤ \times ٤}{٤ \times ٤ \times ٤}}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} + ٥ \times ٢\sqrt[3]{٢} - ٨\sqrt[3]{\frac{١٦}{٦٤}}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٠\sqrt[3]{٢} - \frac{٨}{٤}\sqrt[3]{١٦}$

$= ١٣\sqrt[3]{٢} - ٢\sqrt[3]{٢ \times ٨}$

$= ١٣\sqrt[3]{٢} - ٢ \times ٢\sqrt[3]{٢}$

$= ١٣\sqrt[3]{٢} - ٤\sqrt[3]{٢} = ٩\sqrt[3]{٢}$

(٧) إذا كانت $\text{س} = \sqrt[3]{٣} + ١$ ، $\text{ص} = \sqrt[3]{٣} - ١$

أوجد $(\text{س} + \text{ص})^٣$ ، $(\text{س} - \text{ص})^٣$

$(\text{س} + \text{ص})^٣ = (\sqrt[3]{٣} + ١ + \sqrt[3]{٣} - ١)^٣$

$= (٢\sqrt[3]{٣})^٣ = ٢٤$

$(\text{س} - \text{ص})^٣ = (\sqrt[3]{٣} + ١ - (\sqrt[3]{٣} - ١))^٣$

$(\text{س} - \text{ص})^٣ = (\sqrt[3]{٣} + ١ - \sqrt[3]{٣} + ١)^٣$

$= (٢)^٣ = ٨$

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

أولاً المكعب إذا كان مكعب طول حرفه ل فإن

(١)مساحة الوجه (على شكل مربع) =
طول الضلع × نفسه = ل × ل = $ل^٢$

(٢)المساحة الجانبية للمكعب =
مساحة الوجه × ٤ = ٤ × ل٢ = ٤ $ل^٢$

(٣)المساحة الكلية للمكعب =
مساحة الوجه × ٦ = ٦ × ل٢ = ٦ $ل^٢$

(٤)حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه
= ل × ل × ل = $ل^٣$

ثانياً (١)حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^٣$
(٢)مساحة سطح الكره = ٤ π $نق^٢$

ثالثاً مساحة الدائرة = π $نق^٢$
محيط الدائرة = ٢ π نق

رابعاً
(١) حجم متوازى المستطيلات
= الطول × العرض × الإرتفاع

(٢) حجم متوازى المستطيلات
= مساحة القاعدة × الإرتفاع

(٣) المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات
= محيط القاعدة × الإرتفاع

(٤) المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات
= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين
= ٢(س ص + س ع + ص ع)

رابعاً
(١) حجم الإسطوانة
= مساحة القاعدة × الإرتفاع
= π $نق^٢$ × ع

(٣) المساحة الجانبية للإسطوانة
= محيط القاعدة × الإرتفاع
= ٢ π نق × ع

(٤) المساحة الكلية للإسطوانة
= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين
= ٢ π نق ع + ٢ π $نق^٢$

تدريبات

(١) دائرة مساحتها ٣٨و٥ $سم^٢$ أوجد محيطها

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

مساحة الدائرة = π $نق^٢$ = ٣٨و٥

$\frac{٢٢}{٧}$ × $نق^٢$ = ٣٨و٥ بضرب الطرفين فى $\frac{٧}{٢٢}$

$\frac{٧}{٢٢}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $نق^٢$ = ٣٨و٥ × $\frac{٧}{٢٢}$

$نق^٢$ = ١٢و٢٥ بايجاد الجذر التربيعى للطرفين

نق = $\sqrt{١٢و٢٥}$ = ٣و٥ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣و٥ = ٢٢ سم

---

(٢)أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣}

حجم المكعب = ل^{٣} = ١٢٥ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

ل = $\sqrt[3]{125}$ = ٥ سم

المساحة الكلية للمكعب =

٦ ل^{٢} = ٦ × ٥ × ٥ = ١٥٠ سم^{٢}

---

(٣)أوجد طول حرف مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^{٣}

حجم المكعب = ل^{٣} = ٢ $\sqrt{٢}$

ل^{٣} = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$

ل = $\sqrt{٢}$ سم

---

(٤) أوجد حجم مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢}

المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{٢}= ٢٩٤

ل^{٢}= ٢٩٤ ÷ ٦

ل^{٢}= ٤٩

ل = $\sqrt{٤٩}$ ل = ٧ سم

حجم المكعب = ل^{٣} = ٧ ^{٣} = ٣٤٣ سم^{٣}

---

(٥) أوجد حجم متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم

حجم متوازى المستطيلات

= الطول × العرض × الإرتفاع

= $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٦}$ = ٦ سم^{٣}

---

(٦) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٧٢٠ سم^{٣} و ارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية

حجم متوازى المستطيلات

= مساحة القاعدة × الإرتفاع = ٧٢٠

مساحة القاعدة × ٥ = ٧٢٠

مساحة القاعدة = ٧٢٠ ÷ ٥ = ١٤٤ سم^{٢}

مساحة القاعدة (مربع) = ل^{٢} = ١٤٤

ل = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات

= ٢(س ص + س ع + ص ع)

= ٢(١٢ × ١٢ + ١٢ × ٥ + ١٢ × ٥)

= ٥٢٨ سم^{٢}

---

(٧) إسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرقاعدتها ١٤سم و ارتفاعها ٢٠ سم أوجد حجمها و مساحتها الكلية

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع

= π نق^{٢} × ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ × ٢٠

= ١٢٣٢٠ سم^{٣}

المساحة الجانبية للإسطوانة

= محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع

=٢ ×$\frac{٢٢}{٧}$×١٤×٢٠=١٧٦٠ سم^{٢}

المساحة الكلية للإسطوانة

= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ١٧٦٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤

= ١٧٦٠ + ١٢٣٢ = ٢٩٩٢ سم^{٢}

(٨) المساحة الجانبية لاسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ل و ارتفاعها ع =

نق = $\frac{ل}{٢}$

المساحة الجانبية للإسطوانة

= محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق × ع

= ٢ × π × $\frac{ل}{٢}$ × ع = π ل ع

---

(٩) إذا كان ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها أوجد ارتفاع الأسطوانة علماً بأن حجم الأسطوانة ٧٢ π سم^٣

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع

= π نق^٢ × ع = ٧٢ π بقسمة الطرفين على π

نق^٢ × نق = ٧٢

نق^٣ = ٧٢

نق = $\sqrt[٣]{٧٢}$ = $\sqrt[٣]{٨ \times ٩}$ = ٢ $\sqrt[٣]{٩}$ سم

---

(١٠) أوجد الحجم و مساحة سطح لكرة طول قطرها ٢و٤ سم

نق = ٢و٤ ÷٢ = ١و٢ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣

= $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١و٢ × ١و٢ × ١و٢

= ٨٠٨و٣٨ سم^٣

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^٢

= ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١و٢ × ١و٢ = ٤٤و٥٥ سم^٢

(١١) كرة حجمها ٥و٥٦٢ π سم^٣ أوجد مساحة سطحها بدلالة π

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ = ٥و٥٦٢ π

بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^٣ = ٥و٥٦٢ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ = ٥و٥٦٢ × $\frac{٣}{٤}$

نق^٣ = ٨٧٥و٤٢١ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{٨٧٥و٤٢١}$ = ٥و٧ سم

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^٢

= ٤ × π × ٥و٧ × ٥و٧ = ٢٢٥ π سم^٢

---

(١٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^٣

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ = $\frac{٩}{٢}$ π

بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^٣ = $\frac{٩}{٢}$ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ = $\frac{٩}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$

نق^٣ = $\frac{٢٧}{٨}$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ = $\frac{٣}{٢}$ سم

حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

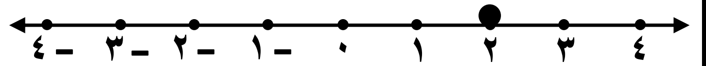
أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

(١) س^{٣} - ٢ = ٦ بإضافة +٢ للطرفين

س^{٣} - ٢ +٢ = ٦ +٢

س^{٣} = ٨ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

س = $\sqrt[3]{٨}$ = ٢ م.ح فى ح = { ٢ }

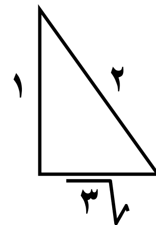


(٢) س + ١ = $\sqrt{٣}$ بإضافة - ١ للطرفين

س + ١ - ١ = $\sqrt{٣}$ - ١

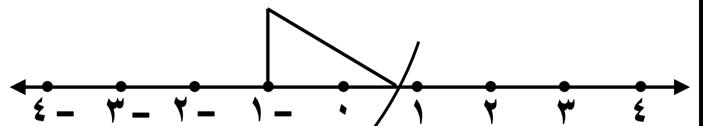
س = $\sqrt{٣}$ - ١

م.ح فى ح = { $\sqrt{٣}$ - ١ }



طول الوتر = (٣+١)/٢ = ٢

طول ضلع القائمة = (٣-١)/٢ = ١





تابعنا على صفحتنا على الفيسبوك
www.facebook.com/ZakrolySite

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

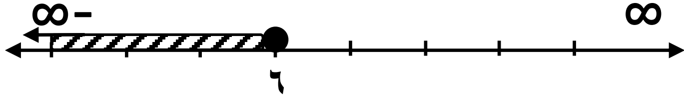
(١) س – ١ ≤ ٥ حيث س ∈ ط

س – ١ ≤ ٥ بإضافة +١ للطرفين

س – ١ +١ ≤ ٥+١

س ≤ ٦

م.ح فى ح =] -∞ ، ٦]



(٢) ٢س +٣ < ٧ حيث س ∈ ص

٢س +٣ < ٧ بإضافة – ٣ للطرفين

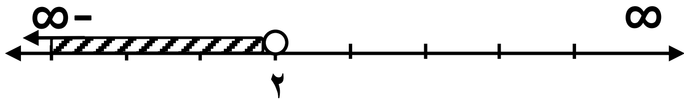
٢س +٣ – ٣ < ٧ – ٣

٢س < ٤

٢س/٢ < ٤/٢

س < ٢

م.ح فى ح =] -∞ ، ٢ [



(٣) ٢س – ٥ ≥ ٥ حيث س ∈ ن

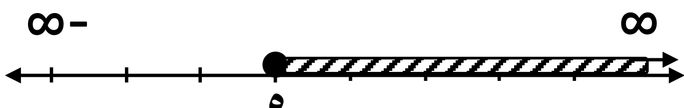
٢س – ٥ ≥ ٥ بإضافة +٥ للطرفين

٢س – ٥ +٥ ≥ ٥ +٥

٢س ≥ ١٠ بقسمة الطرفين على ٢

٢س/٢ ≥ ١٠/٢

س ≥ ٥ س~ = [٥ ، ∞ [



(٤) ٧ - ٥س ⩾ ٢ حيث س ∈ ن

٧ - ٥س ⩾ ٢ بإضافة - ٧ للطرفين

٧ - ٥س –٧ ⩾ ٢ - ٧

-٥س ⩾ -٥ بقسمة الطرفين على -٥

$\frac{-٥س}{-٥} ⩽ \frac{-٥}{-٥}$

س ⩽ ١

س = [١، ∞[



(٥) ٥ > ٣س – ١ ⩾ ١١ حيث س ∈ ن

٥ > ٣س – ١ ⩾ ١١

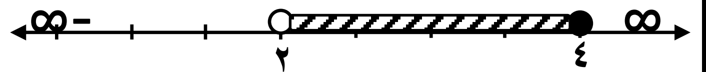
بإضافة +١ لجميع الأطراف

٥+١ > ٣س – ١ +١ ⩾ ١١+١

٦ > ٣س ⩾ ١٢ بالقسمة على ٣

$\frac{٦}{٣} > \frac{٣س}{٣} ⩾ \frac{١٢}{٣}$

٢ > س ⩾ ٤



س =]٢ ، ٤]

العلاقة بين متغيرين

أ س + ب ص = جـ حيث أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر

تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص

(١) إذا كان الزوج المرتب (٢ ، ٦) يحقق العلاقة ص = ب س احسب قيمة ب

∵ ص = ب س

∴ ٦ = ب × ٢ بقسمة الطرفين على ٢

$\frac{٦}{٢} = \frac{٢ ب}{٢}$ ∴ ب = ٣

(٢) إذا كان الزوج المرتب (١ ، ٢) يحقق العلاقة ص = س + أ احسب قيمة أ

∵ ص = س + أ

∴ ٢ = ١ + أ

∴ أ = ٢ - ١ ∴ أ = ١

(٣) إذا كان الزوج المرتب (٣ ، - ٤) يحقق العلاقة ص + ٢ س = ب احسب قيمة ب

∵ ص + ٢ س = ب

∴ - ٤ + ٢ × ٣ = ب

∴ - ٤ + ٦ = ب ∴ ب = ٢

(٤) إذا كان الزوج المرتب (جـ ، ٤) يحقق العلاقة ٣ س – ٢ ص = ١٠ احسب قيمة جـ

∵ ٣ س – ٢ ص = ١٠

∴ ٣ × جـ – ٢ × ٤ = ١٠

∴ ٣جـ – ٨ = ١٠

∴ ٣جـ = ١٠ + ٨

∴ ٣جـ = ١٨ ÷ ٣

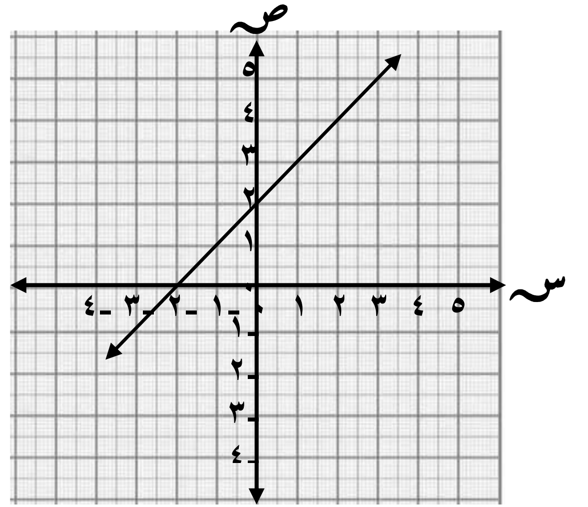
∴ جـ = ٦

(٥) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
ص = س + ٢ و مثلها بيانياً

بفرض س = ٠
ص = (٠) + ٢ = ٢ (٠ ، ٢)

بفرض س = ١
ص = (١) + ٢ = ٣ (١ ، ٣)

بفرض س = ٢
ص = (٢) + ٢ = ٤ (٢ ، ٤)

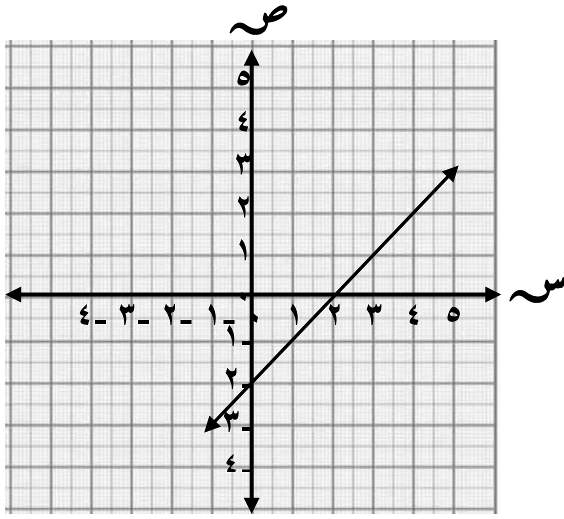


(٦) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
س = ص + ٢ و مثلها بيانياً

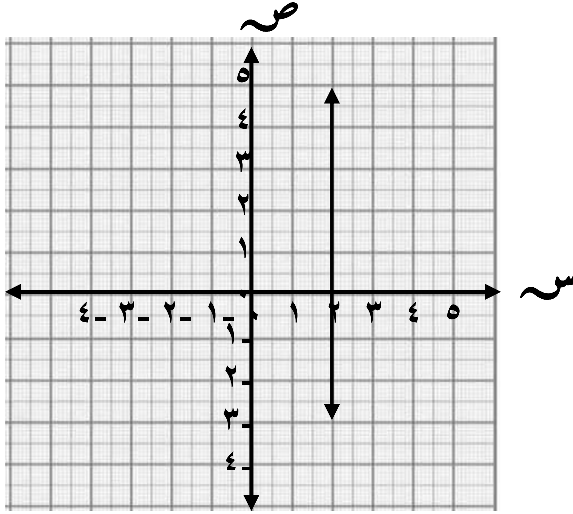
بفرض ص = ٠
س = (٠) + ٢ = ٢ (٢ ، ٠)

بفرض ص = ١
س = (١) + ٢ = ٣ (٣ ، ١)

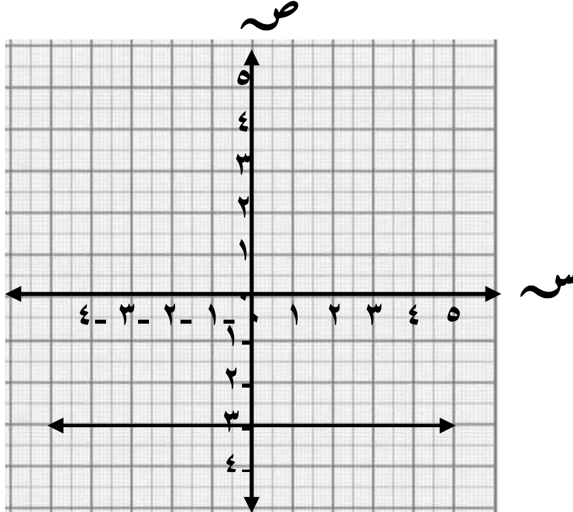
بفرض ص = ٢
س = (٢) + ٢ = ٤ (٤ ، ٢)



(٧) مثل بيانياً س = ٢



(٨) مثل بيانياً ص = - ٣



(٩) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
س +٢ ص = ٤ و مثلها بيانياً

(عزل)

س + ٢ص = ٤
س = ٤ - ٢ص

بفرض ص = ٠

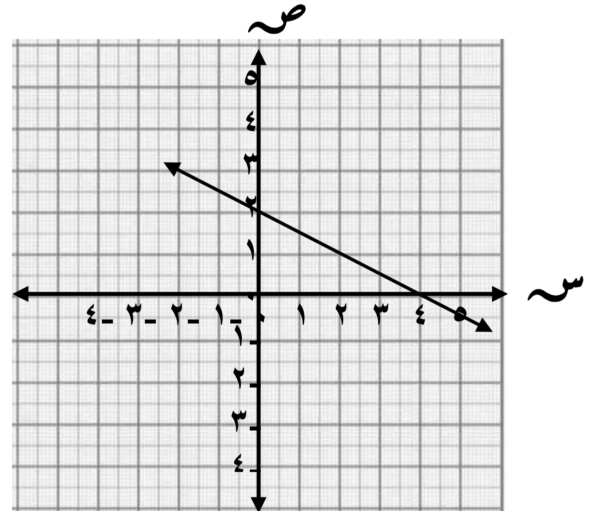
س = ٤ - ٢× (٠) = ٤ (٤ ، ٠)

بفرض ص = ١

س = ٤ - ٢× (١) = ٢ (٢ ، ١)

بفرض ص = ٢

س = ٤ - ٢× (٢) = ٠ (٠ ، ٢)



(١٠) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
٢س - ص = ١ و مثلها بيانياً

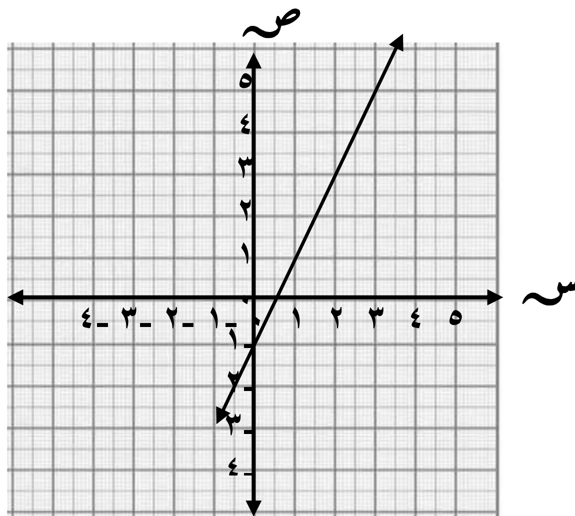
(عزل)

٢ س - ص = ١
- ص = ١ ـ ٢ س ÷ - ١
ص = - ١ + ٢س

بفرض س = صفر
ص = - ١ + ٢ × (٠) = - ١ (٠ ، - ١)

بفرض س = ١
ص = - ١ + ٢ × (١) = ١ (١ ، ١)

بفرض س = ٢
ص = - ١ + ٢ × (٢) = ٣ (٢ ، ٣)



(١١) أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للمعادلة
٣ س + ٢ص = ١٢ مع محورى الإحداثيات

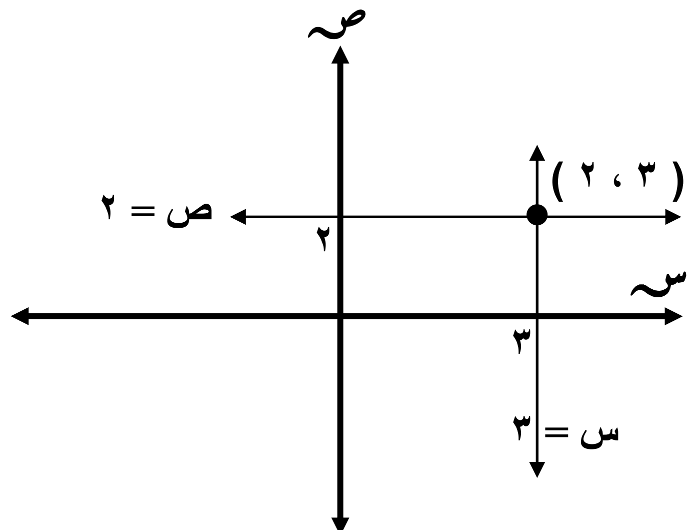
أولاً
المستقيم يقطع محور السينات عند ص = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ س +٢ × (صفر) = ١٢
٣ س = ١٢ ÷ ٣
س = ٤
نقطة التقاطع مع محور السينات (٤ ، ٠)

ثانياً
المستقيم يقطع محور الصادات عند س = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ × (صفر) + ٢ ص = ١٢
٢ ص = ١٢ ÷ ٢
ص = ٦
نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٦)

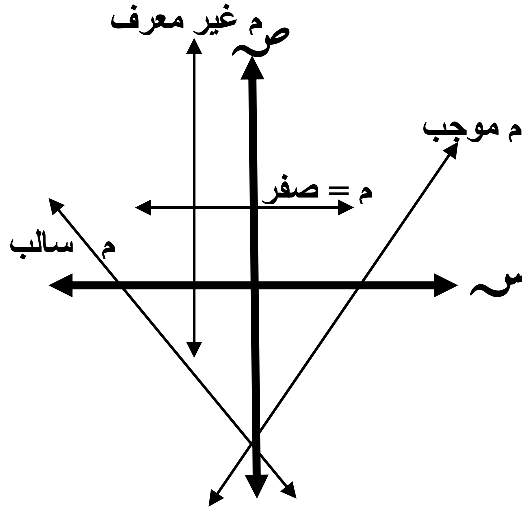
(١٢) نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين للمعادلتين
س = ٣ ، ص = ٢ هى ....



ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين
$(س_{١} ، ص_{١})$ ، $(س_{٢} ، ص_{٢})$

$$= \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$



ملاحظات هامة

(١) ميل محور السينات يساوى صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى يوازى السينات يساوى صفر

(٣) ميل محور الصادات غير معرف

(٤) ميل أى مستقيم رأسى يوازى الصادات غير معرف

(٥) إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية موجبة

(٦) إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية سالبة

تدريبات

(١) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٤ - ١}{٣ - ٢} = \frac{٣}{١} = ٣$$

(٢) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (- ٤ ، - ١) ، (٣ ، ٥)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٥ - (-١)}{٣ - (-٤)} = \frac{٥ + ١}{٣ + ٤} = \frac{٦}{٧}$$

(٣) اثبت أن النقاط ا(١ ، ١)، ب(٢ ، ٣) ، جـ (٣ ، ٥) تقع على استقامة واحدة

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ا ب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٣ - ١}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٥ - ٣}{٣ - ٢} = \frac{٢}{١} = ٢$$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ ا ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

(٤) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س(م ، ٥)، ص(٢ ، ٣) ميله = $\frac{٢}{٧}$ أوجد قيمة م

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٣ - ٥}{٢ - \text{م}} = \frac{-٢}{٢ - \text{م}} = \frac{٢}{٧}$$

٤ - ٢م = - ١٤ بإضافة - ٤ للطرفين

٤ - ٢م - ٤ = - ١٤ - ٤

- ٢م = - ١٨ بالقسمة على - ٢

م = ٩

(٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س(٣ ، ٧)، ص(٥ ، ك) يوازى محور السينات احسب قيمة ك

∵ المستقيم يوازى محور السينات

∴ الميل = صفر

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ك} - ٧}{٥ - ٣} = \frac{\text{ك} - ٧}{٢} = \frac{٠}{٢}$$

ك - ٧ = صفر ك = ٧

(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س(٥ ، ١)، ص(ك ، ٩) يوازى محور الصادات احسب قيمة ك

∵ المستقيم يوازى محور الصادات

∴ الميل غير معرف

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٩ - ١}{\text{ك} - ٥} = \frac{٨}{\text{ك} - ٥} = \frac{٨}{٠}$$

ك - ٥ = صفر ك = ٥

(٧) إذا كانت النقاط

ٲ(١ ، ك)، ب(- ١ ، ٥) ، ج (٢ ، - ٣)

تقع على استقامة واحدة احسب قيمة ك

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ب ج}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٣ - ٥}{٢ - (-١)} = \frac{-٨}{٣}$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ٲب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٥ - \text{ك}}{-١ - ١} = \frac{٥ - \text{ك}}{-٢}$$

∵ ٲ ،ب ، ج تقع على استقامة واحدة

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ٲب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$

$$\frac{٥ - \text{ك}}{-٢} = \frac{-٨}{٣}$$

١٥ −٣ك = ١٦ بإضافة -١٥ للطرفين

١٥ −٣ك -١٥ = ١٦ -١٥

−٣ك = ١ بالقسمة على −٣

$$\text{ك} = \frac{-١}{٣}$$

٥ العمليات على الأعداد الحقيقية

(١) أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة

١) المحايد الجمعى فى ح هو .... والمحايد الضربى هو ....

٢) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو .... (فى أبسط صورة)

٣) المعكوس الجمعى للعدد $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

٤) $٧ + \sqrt{٣} = ٥ + (.... + ...)$

٥) اذا كان : $س = \sqrt{٣} + ٧$ ، $ص = \sqrt{٣} - ٧$ فان : $(س + ص)^٢ =$ ....

٦) $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) =$ ....

٧) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ هو ....

٨) $\sqrt{١٥} \times \sqrt{٢٠} = ١٠ \times$ ....

٩) $\sqrt{٧٥} \times \sqrt{٥} = ٥ \times$ ....

١٠) اذا كانت: $س^٢ = ٥$ فان : $(س + \sqrt{٥})^٢ =$ ....

١١) مرافق العدد $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ هو .... ومجموعهما هو .... وحاصل ضربهما ....

١٢) اذا كان : $س = ٣ + \sqrt{٢}$ فان مرافقها .... وحاصل ضربهما ....

١٣) العدد $\frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٦}}$ فى أبسط صورة هو ....

١٤) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ فى أبسط صورة هو ....

١٥) المعكوس الضربى للعدد $١ + \sqrt{٥}$ فى أبسط صورة هو ....

١٦) اذا كان: $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فان س فى أبسط صورة يساوى ....

١٧) اذا كان : $س = ١ + \sqrt{٥}$ ، $ص = ١ - \sqrt{٥}$ فان : س ص = ... ، س − ص = ...

١٨) $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})^٢ =$ .... ١٩) $(١ + \sqrt{٣})^٢ =$ ....

٢٠) $\sqrt{٨} + \sqrt{٢} = ... \sqrt{٢}$ ٢١) $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^٢ =$ ....

٢٢) اذا كان : $س = \frac{١}{\sqrt{٨} - \sqrt{٥}}$ ، $س ص = \frac{١}{٣}$ فان : ص = ...

٢٣) المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ هو $\frac{....}{\sqrt{٣}}$

٢٣) مرافق العدد $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ هو ....

٢٤) المعكوس الجمعى للعدد $٥ - \sqrt{٣}$ هو ....

٢٥) $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) =$ ....

٢٦) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هو ....

٢٧) حاصل ضرب العدد $(\sqrt{٧}+\sqrt{٢})$ فى مرافقة يساوى ....

٢٨) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو ....

٢٩) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣}+\sqrt{٢}$ فى أبسط صورة يساوى ....

٣٠) المستطيل الذى بعداه $(\sqrt{٣}+١)$ سم ، $(\sqrt{٣}-١)$ سم ، تكون مساحته = ...$سم^٢$

٣١) اذا كان : $س=\sqrt{٢}+\sqrt{٣}$ ، $ص=\sqrt{٢}-\sqrt{٣}$ ، فان : $(س+ص)^٢$ = ...

٣٢) $٢\sqrt{\frac{١}{٢}}-\sqrt{٢}$ = ...

٣٣) المعكوس الضربى للعدد $-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو ....

٣٤) $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، .... أكمل بنفس التسلسل

٣٥) اذا كانت : $س=\sqrt{٣}+٧$ ، $ص=\sqrt{٣}-٧$ فان : $(س+ص)^٣$ = ...

٣٦) $(\sqrt{٨}+\sqrt{٢})(\sqrt{٨}-\sqrt{٢})$ = ...

(٢) أختر الأجابة الصحيحة

١) $(٢\sqrt{٢})^٢$ = ... [١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠]

٢) اذا كان : $س=\sqrt{٣}+٢$ ، $ص=\sqrt{٣}-٢$ فان : $(س ص ، س+ص)$ = ...
[$(١ ، ٢\sqrt{٣})$ ، $(-١ ، ٢\sqrt{٣})$ ، $(٥ ، ٢\sqrt{٣})$ ، $(٥ ، ٩)$]

٣) اذا كانت : $س=\sqrt{٧}+\sqrt{٢}$ ، $ص=\sqrt{٧}-\sqrt{٢}$ فان : $س-ص$ = ...
[$٧\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٤}$ ، $٢\sqrt{٢}$]

٤) $\sqrt{٣}(\sqrt{١١}+\sqrt{٣})$ = ... [$٣\sqrt{١١}+٢$ ، $\sqrt{٣٣}+٣$ ، $١١\sqrt{٣}+٢$ ، $٢\sqrt{١١}+٣$]

٥) العدد $(١+\sqrt{٣})(١-\sqrt{٣})$ هو عدد .... [طبيعى ، نسبى ، غير نسبى ، أولى]

٦) أبسط صورة للمقدار : $(\sqrt{٣}+١)^٢(\sqrt{٣}-١)^٢$ هو .... [$٢(\sqrt{٣}-١)$ ، $(\sqrt{٣}+١)^٢$ ، ٤ ، ١٣]

٧) $(\sqrt{٦}+\sqrt{٥})(\sqrt{٦}-\sqrt{٥})$ = ... [٦ ، ٥ ، ١ ، ١١]

٨) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧}-\sqrt{٣}$ هو ...... [$\sqrt{٧}-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٧}+\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}-\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٧}-\sqrt{٣}$]

٩) المستطيل الذى بعداه $(\sqrt{٧}+٢)$ سم ، $(\sqrt{٧}-٢)$ سم تكون مساحته ....$سم^٢$
[٥ ، ٣ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧}-٤$]

١٠) $\sqrt{١٦}-\sqrt{٢}$ = ... [$\sqrt{١٤}$ ، $\sqrt{٢}$ ، ٨ ، $\sqrt{٨}$]

١١) $\sqrt{٨}-\sqrt{٢}$ = ... [$\sqrt{٢}$ ، ٢ ، $\sqrt{٦}$ ، ٣]

١٢) العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٤٨}$ هو .... [$\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٠}$ ، $١٨\sqrt{٢}$]

١٣) $(\sqrt{٨}+\sqrt{٢})^٢$ = ... [$\sqrt{١٠}$ ، ١٠ ، $\sqrt{١٨}$ ، ١٨]

١٤) $\frac{١}{[illegible]}\sqrt{٢٠}+١٠\sqrt{\frac{١}{[illegible]}}$ = ... [$٣\sqrt{٥}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، ٥ ، ١٢]

١٥) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو .... [$-\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ ، $١٠\sqrt{٥}$ ، $-٢\sqrt{٥}$ ، $٢\sqrt{٥}$]

١٦) مرافق العدد ($٣-\sqrt{٢}$) هو .... [$\sqrt{٢}-٣$ ، $\sqrt{٢}+٣$ ، $٣-\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}-٣$]

١٧) $\sqrt{٥٠}-\sqrt{١٨}-\sqrt{٢}=$ .... [$\sqrt{٣٠}$ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢ ، $٢\sqrt{٢}$]

١٨) $(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})=$ .... [٢ ، ١٢ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $-٢\sqrt{٥}$]

١٩) اذا كانت: $س=\sqrt{٣}+١$ ، $ص=\sqrt{٣}-١$ فان : $(س+ص)^{٢}=$ .... [٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ٨]

٢٠) اذا كانت: $س=\sqrt{٣}+\sqrt{٥}$ ، $ص=\sqrt{٣}-\sqrt{٥}$ فان : $(س-ص)^{٢}=$ ....

.... [٦ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٤٠]

٢١) $\sqrt[٣]{٢٤}-٩\sqrt[٣]{\frac{٨}{٩}}=$ .... [$-٨\sqrt[٣]{٣}$ ، $٢٠\sqrt[٣]{٩}$ ، $١٢\sqrt[٣]{٣}$ ، $٨\sqrt[٣]{٣}$]

٢٢) $\sqrt{١٢}-\sqrt{٣}=$ .... [٣ ، $\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$]

٢٣) $(\sqrt{٧}+\sqrt{٢})^{٢}-٢\sqrt{١٤}=$ .... [١٤ ، ٩ ، $٤\sqrt{١٤}$ ، ١٨]

٢٤) $\sqrt{٥}+\sqrt{٢٠}=$ .... [٥ ، $٣\sqrt{٥}$ ، صفر ، $٢\sqrt{٢٠}$]

٢٥) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ هو .... [٦ ، $\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$ ، $٦\sqrt{٣}$]

٢٦) $\sqrt{٨}-٢\sqrt{٢}=$ .... [$\sqrt{٦}$ ، $٢\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٢}$ ، صفر]

أ/ شريف عبد الحميد

(٢) اختصر كلا مما يأتى لأبسط صورة

١) $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

الحـــل :

....

....

....

....

٢) $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٢٧} - ٥\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{١٢}$

الحـــل :

....

....

....

....

٣) $\sqrt{٢٧} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٧٥}$

الحـــل :

....

....

....

....

٤) $\sqrt{١٨} + \sqrt{٨} - ٤\sqrt{٢}$

الحـــل :

....

....

....

....

٥) $\sqrt{٥٠} - \frac{١}{٢}\sqrt{٣٢} - \sqrt{١٨}$

الحـــل :

....

....

....

....

٦) $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٥٠} + ٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحـــل :

....

....

....

....

٧) $\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{٢}$

الحـــل :

....

....

....

....

٨) $٢\sqrt{٨} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٥٠} - ٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحـــل :

....

....

....

....

٩) $\sqrt{٤٨} - ٢\sqrt{٢٧} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}}$

الحـــل :

....

....

....

....

١٠) $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$

الحـــل :

....

....

....

....

١١) $\sqrt[3]{١٢٥} - \sqrt[3]{٢٤}$

الحـــل:

....
....
....
....

١٢) $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$

الحـــل:

....
....
....
....

١٣) $\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦}$

الحـــل:

....
....
....
....

١٤) $\sqrt[3]{٣٢} + \sqrt{٤٥} + \frac{١}{٢}\sqrt{٢٠} - ٢\sqrt[3]{٤}$

الحـــل:

....
....
....
....

١٥) $\sqrt[3]{٥٤} - \sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{١٦}$

الحـــل:

....
....
....
....

١٦) $\sqrt[3]{٥٤} + ٤\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} - \sqrt[3]{-٢}$

الحـــل:

....
....
....
....

(٤) اثبت أن

١) $\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{١٦} - ٢\sqrt[3]{٥٤} = ٠$

الحـــل:

....
....
....
....

٢) $\sqrt[3]{٥٤} \times \sqrt[3]{١٦} \div (\sqrt[3]{٤} \times ٦) = ١$

الحـــل:

....
....
....
....

(٥) اذا كانت:

ا = $\sqrt[3]{٥} + ١$ ، ب = $\sqrt[3]{٥} - ١$ أوجد قيمة : $(ا - ب)^{٥}$ ، $(ا + ب)^{٣}$

الحـــل:

....
....
....
....

الحـــل:

....
....
....

أ : شريف عبد الحميد دياب | 01155092143

(٥) أجب عن الأسئلة الآتية

١) اذا كان : س = √٣ + ١ ، ص = √٣ − ١
فأوجد : س + ص ، س ص
الحـــل :

٢) اذا كان : س = √٧ + √٣ ، ص = √٧ − √٣
فأوجد فى أبسط صورة : $\frac{\text{س + ص}}{\text{س ص}}$
الحـــل :

٢) اذا كان : س = $\frac{٤}{٣ + \sqrt{٥}}$ ، ص = ٣ + √٥
فأوجد : س^{٢}ص^{٢}
الحـــل :

٤) اذا كان : س = √٥ − ٢ ، ص = √٥ + ٢
فأوجد قيمة المقدار : س^{٢} + س ص + ص^{٢}
الحـــل :

٥) اذا كان : س = √٥ + √٣ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$
اثبت أن : س،ص مترافقان وأوجد (س + ص) ÷ س ص
الحـــل :

٦) اذا كان : س = √٥ + √٣ ، ص = $\frac{٢}{\text{س}}$
فأوجد قيمة المقدار : $\frac{\text{س − ص}}{\text{س ص}}$
الحـــل :

٧) اذا كان : س = √٣ + √٢ ، ص = √٣ − √٢
فأوجد : (س + ص)^{٢}
الحـــل :

٨) اذا كان : س = √٥ + √٢ ، ص مرافق للعدد س
فأوجد قيمة: س + ص ، س ص − ١
الحـــل :

٩) اذا كان : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة: $س^٢ ص^٢$

الحـــل :

....

....

....

....

١٠) اذا كان : $أ = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ب = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

فأوجد قيمة المقدار : $أ^٢ - ب^٢$

الحـــل :

....

....

....

....

أ: شريف عبد الحميد

٦ العمليات على الجذور التربيعية والتكعيبية

(١) أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة

١) مكعب طول حرفه ٦ سم ، تكون مساحته الجانبية = ... سم^{٢}
٢) مكعب طول حرفه ٤ سم ، تكون مساحته الكلية = ... سم^{٢}
٣) مكعب حجمة ٢٥ ١ سم^{٣} تكون مساحتة الجانبية = ... سم^{٢}
٤) مكعب حجمة ١ سم^{٣} تكون مساحتة الكلية = ... سم^{٢}
٥) مكعب مجموع أطوال أحرفه ٣٦ سم ، فان حجمه = ... سم^{٣}
٦) دائرة محيطها ٢٠ π سم ، تكون مساحتها = ... π سم^{٢}
٧) الكرة التى حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم^{٣} يكون طول قطرها = ...سم
٨) الكرة التى حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^{٣} يكون طول قطرها = ...سم
٩) المكعب الذى حجمه ٨ سم^{٣} يكون مجموع أطوال أحرفه ....سم
١٠) مكعب حجمه ٢٧ سم^{٣} يكون طول حرفه ....سم
١١) اذا كان حجم كرة = ٣٦ π سم^{٣} فان طول قطرها ....سم
١٢) اذا كان حجم مكعب ٢١٦ سم^{٣} فان مساحة أحد أوجهه = ...سم^{٢}
٢٣) متوازى مستطيلات أبعاده : ٢ سم ، ٣ سم ، ٥ سم فان حجمه ....سم^{٣}
٢٤) مكعب طول حرفه ٦ سم يكون حجمه ....سم^{٣}
٢٥) مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم^{٢} فان حجمه ....سم^{٣}
٢٦) حجم الأسطوانة = ...وحدة مكعبة
٢٧) أسطوانه دائرية قائمة حجمها يساوى ٧٢٩ π سم^{٣} فاذا كان ارتفاعها يساوى طول نصف قطرها فان ارتفاعها = ...سم
٢٨) حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم = ... π سم^{٣}
٢٩) حجم كرة طول قطرها ٦ سم = ... π سم^{٣}
٣٠) دائرة طول نصف قطرها ٧ سم يكون محيطها = ...سم
٣١) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها نق ، وارتفاعها ع فان مساحتها الجانبية = ...
٣٢) المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = ...
٣٣) الدائرة التى محيطها ٢٠ π سم يكون مساحتها .... π سم^{٢}
٣٤) مساحة سطح الكرة التى طول قطرها ١٤ سم = ...سم^{٢}

(٢) أختر الأجابة الصحيحة من بين الأجابات المعطاة

١) مكعب حجمة ٦٤ سم^3 ، فان مساحته الجانبيه = ...سم^2 [٤ ، ٨ ، ٦٤ ، ٩٦]

٢) مكعب مساحته الكلية ٢٤ سم^2 ، فان طول حرفه = ...سم [٦ ، ٤ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{8}$]

٣) مكعب مساحته الجانبية ٤ سم^2 ، فان حجمه = ...سم^3 [١ ، ٢ ، ٤ ، ١٦]

٤) مكعب حجمه ٢ $\sqrt{2}$ سم^3 فان طول حرفه = ...سم [$\sqrt{2}$ ، ٢ ، ٨ ، $\frac{3}{2}$]

٥) حجم الكرة = ... [$\frac{4}{3}\pi$ نق^3 ، $\frac{3}{4}\pi$ نق^2 ، $\frac{4}{3}\pi$ نق^2 ، $\frac{3}{4}\pi$ نق^3]

٦) حجم الكرة التى طول قطرها ٦ سم = ...سم^3 [٢٨٨ ، 12π ، 36π ، 288π]

٧) مساحة كرة طول نصف قطرها ٢ سم = ...سم^2 [4π ، 16π ، ١٦ ، 8π]

٨) اذا كان حجم كرة = $\frac{9}{16}\pi$ سم^3 ، فان طول نصف قطرها = ...سم [٣ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{3}$]

٩) اذا كانت مساحة سطح كرة = 36π سم^2 ، فان طول نصف قطرها = ...سم [٩ ، ١٨ ، ٣ ، ٦]

١٠) مكعب حجمه $15\frac{5}{8}$ سم^3 فان طول ضلعه = ...سم [$\frac{5}{2}$ ، $\frac{2}{5}$ ، ٥ ، ٨]

١١) المربع الذى مساحته ١٠ سم^2 يكون طول ضلعه = ...سم [٥ ، −٥ ، $\sqrt{10}$ ، $-\sqrt{10}$]

١٢) مكعب طول حرفه ٤ سم يكون حجمه ....سم^3 [٤ ، ١٢ ، ١٦ ، ٦٤]

١٣) متوازى مستطيلات ابعاده $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{15}$ فان حجمها = ...سم^3 [٣ ، ٥ ، ١٥ ، ٢٢٥]

١٤) حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم = ...سم^3 [4π ، 9π ، 27π ، 36π]

١٥) اذا كان حجم مكعب = ٢٧ سم^3 فان مساحة أحد أوجهه = ...سم^2 [٣ ، ٩ ، ٣٦ ، ٥٤]

١٦) مكعب حجمه ٥ $\sqrt{5}$ سم^3 يكون طول حرفه ....سم [١٢٥ ، ٢٫٥ ، ٥ ، $\sqrt{5}$]

١٧) اذا كان حجم كرة = 32π سم^3 فان طول نصف قطرها = ...سم [$\sqrt[3]{3}$ ، $2\sqrt[3]{3}$ ، ٣ ، ٩]

١٨) مكعب طول حرفه $\sqrt{9}$ سم فإن حجمه = ...سم^3 [٩ ، $9\sqrt{3}$ ، ٢٧ ، ٨١]

١٩) المكعب الذى حجمه ٦٤ سم^3 يكون طول حرفه ....سم [٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٦٤]

(٣) أجب عن الأسئلة الآتية

١) أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم ، وارتفاعها ١٠ سم ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحـــل :

....

....

٢) أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ١٤ سم ، وارتفاعها ١٠ سم أوجد حجمها ، مساحتها الجانبية

($\pi = \frac{22}{7}$)

الحـــل : ....

....

٣) أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢ $\sqrt{7}$ سم ، وارتفاعها ٩ سم أوجد حجمها ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحـــل : ....

....

....

٤) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فاذا كان حجمه ٧٢٠ سم^{٣} وارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكليه .

الحـــل : ....

....

....

....

٥) مكعب طول حرفه = ٥ سم أوجد : مساحته الكلية ، مساحته الجانبية

الحـــل : ....

....

٦) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وارتفاعها ٤ سم أوجد مساحتها الجانبية بدلالة π

الحـــل : ....

....

....

....

٧) أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٤ $\sqrt{2}$ سم ، وارتفاعها ٩ سم أوجد حجمها بدلالة π

الحـــل : ....

....

....

٨) كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}$ π سم^{٣} أوجد طول نصف قطرها

الحـــل : ....

....

....

٩) مكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣} ، أوجد طول حرفه ومساحته الجانبية

الحـــل : ....

....

....

أ/ شريف عبد الحميد

٥) ١ − ٥س ≥ ٦

الحـــل : ....

٦) ١/٢ س + ١ ≥ ٢ > ٣

الحـــل : ....

٧) −١ ≥ ٢س + ١ > ٥

الحـــل : ....

٨) −٥ ≥ ٢س − ٣ ≥ ١

الحـــل : ....

٩) −٣ ≥ ٤س − ٧ ≥ ٥

الحـــل : ....

١٠) ٤ > ٣س + ٤ > ٧

الحـــل : ....

١١) ١ > ٥ − س ≥ ٣

الحـــل : ....

١٢) ١ ≥ ٣ − ٢س ≥ ٥

الحـــل : ....

١١) −٣ ≥ −س > ٣

الحـــل : ....

١٢) |−٣| > ٢س − ١ > ٥

الحـــل : ....

١٢) √−٨ ≥ س + ١ ≥ √٩

الحـــل : ....

١٢) ٥ > ٣ − س > ٣^٢

الحـــل : ....

أ/ شريف عبد الحميد

أ : شريف عبد الحميد دياب

01155092143

١٢) ٥س − ٣ < ٢س + ٩

الحـــل : ....

....

....

....

....

١٢) ٣ − ٤س ≤ س − ٢

الحـــل : ....

....

....

....

....

١٢) س ≤ ٢س − ١ ≤ س + ٣

الحـــل : ....

....

....

....

....

١٤) س − ١ < ٣س − ١ ≤ س + ١

الحـــل : ....

....

....

....

....

أ. شريف عبد الحميد

٨ العلاقة بين متغيرين

(١) أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة

١) اذا كان : (−٣،٢) تحقق العلاقة ٣س + بص = ١ فان : ب = ...

٢) اذا كان : (−ك،٢ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥ فان : ك= ....

٣) اذا كان : (١،ك) تحقق العلاقة س + ص = ٥ فان : ك= ....

٤) العلاقة ص = ٥ تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور ....

٥) العلاقة س = −٢ تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور ....

٦) العلاقة ٣س − ٢ص = ٩ تمثل مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

٧) اذا كان (ك،٤) يحقق العلاقة س + ٢ص = ٨ فان : ك= ....

٨) اذا كان (١،٢) يحقق العلاقة ٢س + ص − جـ = ٠ فان : جـ = ...

٩) اذا كان (−٣،٤) يحقق العلاقة ٢س + بص = ٦ فان : ب = ...

١٠) اذا كان (−١،٥) يحقق العلاقة ٣س+كص = ٢ فان : ك= ....

١١) اذا كان (٢،٣) يحقق العلاقة س + ص = ك فان : ك= ....

١٢) اذا كان : (ك،٢ك) تحقق العلاقة ٢س + ص = ٢٤ فان : ك= ....

١٣) اذا كان : (٢ك،٣ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥ فان : ك= ....

(٢) أختر الأجابة الصحيحة

١) الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة: س + ص = ٤ هو .... [(−١،٣) ، (−١،−٣) ، (١،٣) ، (١،−٣)]

٢) الزوج المرتب (٣،١) يحقق العلاقة ... [س − ص = ٦ ، ٣س + ص = ٦ ، س − ٣ص = ٦ ، س + ٣ص = ٦]

٣) النقطة (٣،٢) لاتحقق العلاقة .... [ص + س = ٥ ، ٣س − ص = ٧ ، ص + س = ٧ ، س − ص = ١]

٤) اذا كانت النقطة (−١،٥) تحقق العلاقة ٣س+كص = ٧ فان : ك= .... [٢ ، −٢ ، ١ ، ١٠]

٥) أى الأزواج التالية يحقق العلاقة ٢س + ص = ٥ ؟ [(−١،٣) ، (١،٣) ، (٣،١) ، (٢،٢)]

٦) اذا كانت : (ك،٦) تحقق العلاقة ص − ٢س = ٠ فان : ك= .... [−٣ ، ٣ ، ٦ ، −٦]

٧) العلاقة ص = ٥ يمثلها بيانيا مستقيم ....
...... [يوازى محور السينات ، يوازى محور الصادات ، محور السينات ، محور الصادات]

٨) اذا كان (٢،−٥) يحقق العلاقة ٣س − ص+جـ = ٠ فان : جـ = ... [١ ، −١ ، ١١ ، −١١]

٩) اذا كان (ب،٣) يحقق العلاقة ص + ٣س = ٩ فان : ب = ... [٣ ، ٢ ، ٩ ، ٥]

١٠) اذا كان (−١،٢) يحقق العلاقة ٣س+كص = ٧ فان : ك= .... [٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥]

١١) اذا كان (أ،١) يحقق العلاقة س + ص = ٥ فان : أ= .... [٣ ، ٢ ، ٩ ، ٥]

١٢) س = ٣ يمثلها بيانيا مستقيم يوازى .... [محور السينات ، محور الصادات ، غير ذلك]

١٣) النقطة (١،١) ∈ للمستقيم الذى معادلته ......
..... [س + ص = ٢ ، س + ٢ص = ٢ ، ٣س + ص = ١٥ ، ٣ص = ٢]

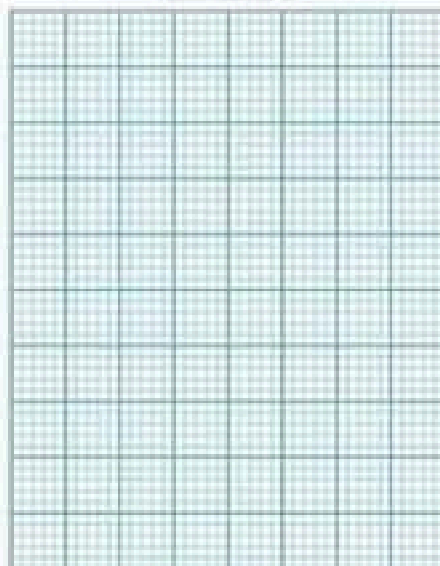
أ : شريف عبد الحميد دياب
01155092143

(٢) مثل بيانيا كلا من العلاقات الآتية

١) س + ص = ٢

الحـــل :

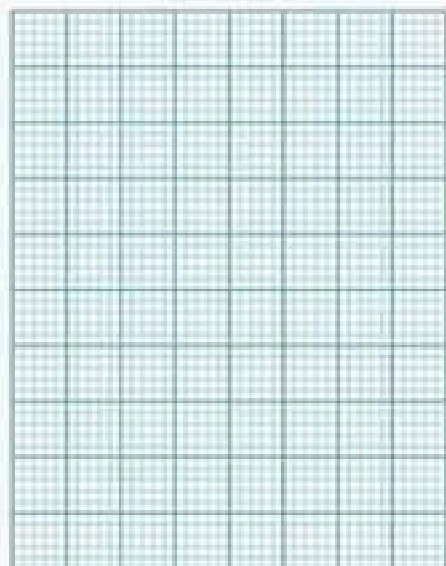
....



٢) ٢س − ص = ٣

الحـــل :

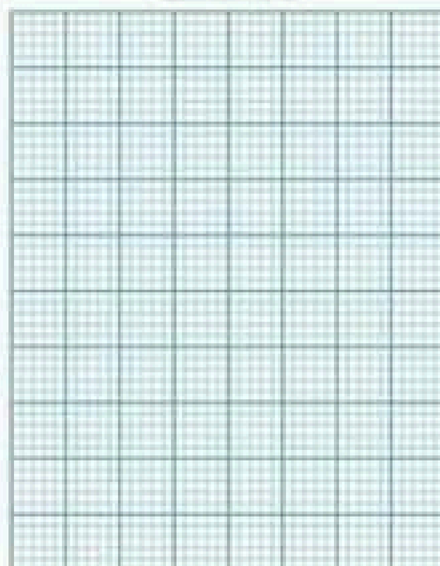
....



٢) س + ٢ص = ٣

الحـــل :

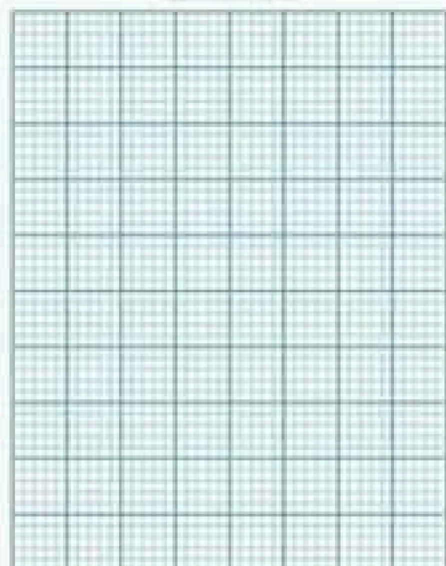
....



٤) ٢س = ٥

الحـــل :

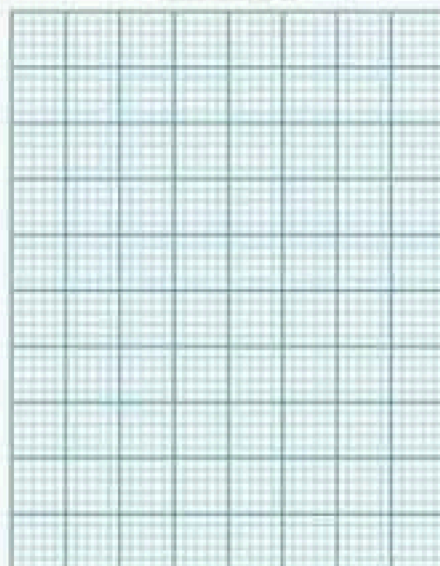
....



٥) ص + ١ =

الحـــل :

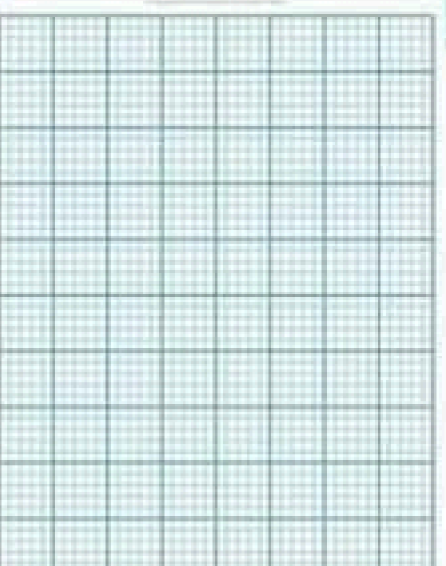
....



٦) س + ص = −١

الحـــل :

....



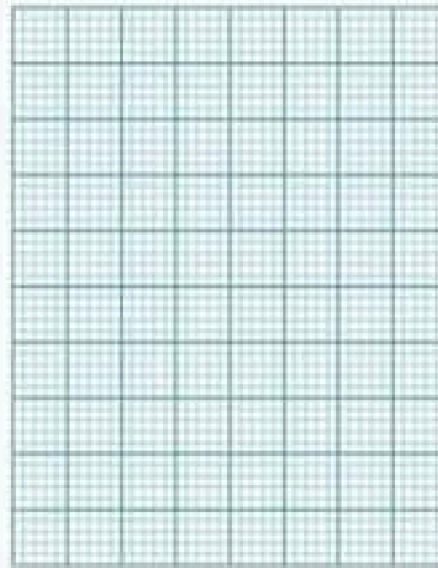
أ : شريف عبد الحميد دياب

01155092143

٧) ص − ٢س = ٠

الحـــل :

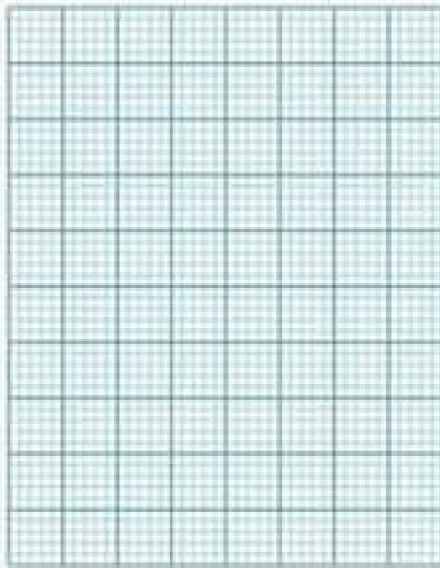
....



٨) س + ص + ٣ = ٠

الحـــل :

....



(٤) أجب عن الأسئلة الآتية

(أ) اذا كانت (٣، −١) تحقق العلاقة : ٥س + ب ص = ١٨ ، فأوجد قيمة ب

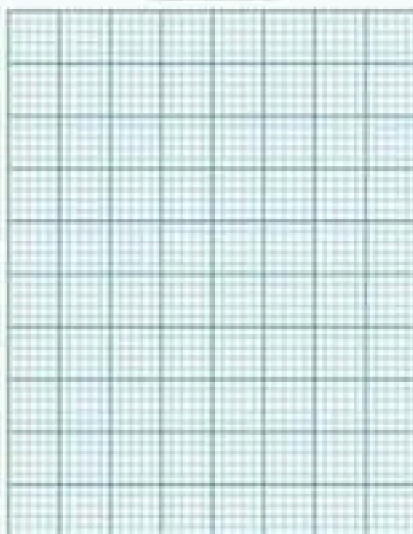
الحـــل : ....

(ب) اذا كانت (ك، ٢ك) تحقق العلاقة : ٣س − ٥ص = ٨ ، فأوجد قيمة ك

الحـــل : ....

(جـ) ارسم الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة ص − ٢س = ٤ ثم أوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الأحداثيات

الحـــل : ....



٩ ميل الخط المستقيم

(١) أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة

١) ميل الخط المستقيم الموازى لمحور السينات يساوى ....
٢) ميل الخط المستقيم الموازى لمحور الصادات يساوى ....
٣) اذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ميل $\overleftrightarrow{ب ج}$ فان النقاط أ،ب،ج تكون على ....
٤) اذا كان أ = (١،٣) ، ب = (٢،١) فان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....
٥) اذا كان أ = (٢،−١) ، ب = (٤،−١) فان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....
٦) اذا كانت أ،ب،ج على استقامة واحدة فان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...
٧) ميل الخط المستقيم = $\frac{.......}{.......}$
٨) اذا كان ميل مستقيم = صفر فانه يوازى محور ....
٩) العلاقة س = ٥ يمثلها مستقيم يوازى محور .... وميله ....
١٠) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢،٧) ، (−٢،٣) هو ....
١١) ميل المستقيم المار بالنقطتين (−٢،٧) ، (−٢،٥) هو ....
١٢) ميل المستقيم المار بالنقطتين (−١،٧) ، (−٢،١٠) هو ....
١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢،٠) ، (٠،٢) هو ....

(٢) أختر الاجابة الصحيحة من بين الأجابات المعطاة

١) اذا كان : أ(٣،٥) ، ب(٥،−١) فان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ... [$-\frac{١}{٣}$ ، −٣ ، ٣ ، $\frac{١}{٣}$]
٢) اذا كان : أ(−١،١) ، ب(٢،٣) فان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ... [$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$]
٣) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ... [صفر ، غير معرف ، ١ ، −١]
٤) ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات = ... [موجب ، سالب ، صفر ، غير معرف]
٥) المستقيم س = ١ يكون ميله .... [−١ ، صفر ، ١ ، غير معرف]
٦) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (−٣،١) ، (١،٥) هو .... [−١ ، −٢ ، ١ ، ٢]
٧) اذا كان ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣،٥) ، (س،٧) غير معرف فان : س = ... [٧ ، ٥ ، ٣ ، ٠]
٨) المستقيم المار بالنقطتين (٣،−٥) ، (٢،−٥) ميلة .... [١٠ ، −١٠ ، غير معرف ، ٠]
٩) المستقيم العمودى على محور الصادات ميله .... [صفر ، ١ ، غير معرف ، −١]
١٠) الجدول الاتى يبين علاقة بين س،ص وهى :
[ص = س + ٤ ، ص = س + ١ ، ص = ٢س − ١ ، ص = ٣س − ٢]

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

(٢) أجب عن الأسئلة الآتية

١) اذا كانت : أ = (−١، ٣) ، ب = (٢، ١) فأوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$

الحـــل : ....

٢) اذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(−١، ٣) ، ب(٢، ص) هو $\frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة ص .

الحـــل : ....

....

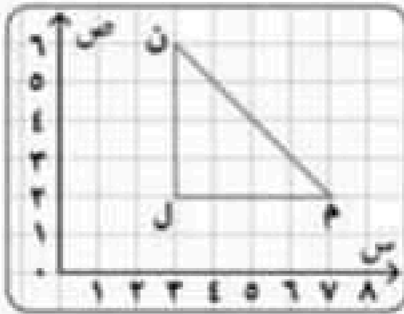
....

٣) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(−١، ٣) ، ب(٢، ٥) هل النقطة جـ(٨، ١) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

الحـــل : ....

....

....



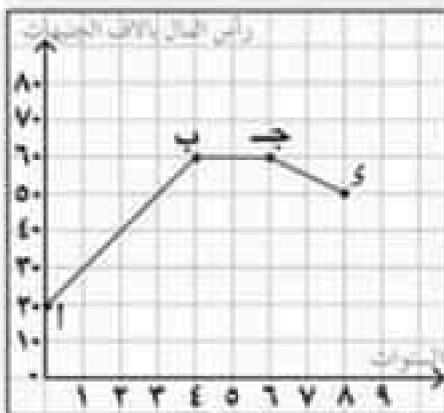
٤) فى الشكل المقابل : ل م ن مثلث قائم الزاوية فى ل ، ق(∠م) = ٤٥°

فاذا كان ل(٣، ٢) ، م(٧، ٢) أوجد احداثى ن واحسب ميل $\overleftrightarrow{من}$

الحـــل : ....

....

....



٥) الشكل المقابل يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات

أ) أوجد ميل كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـء}$ ما دلالة كل منها ؟

ب) أحسب رأس مال الشركة عند بدء عملها .

الحـــل : ....

....

....

....

....

....

العمليات على الجذور

جمع وطرح الجذور

- الجذور المتشابهة فقط هي التي تجمع وتطرح
- عند الجمع أو الطرح نجمع ونطرح المعاملات

✦ $٢\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٣} = ٧\sqrt{٣}$

✦ $٤\sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

✦ $٣\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧} - ٦\sqrt{٧} = \sqrt{٧}$

✦ $٢\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ جذور غير متشابهة لا تجمع

✦ $٢\sqrt[٣]{٥} + ٤\sqrt[٣]{٥} = ٦\sqrt[٣]{٥}$

✦ $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢} = ٢\sqrt[٣]{٢}$

ضرب الجذور

- **ضرب عدد × جذر:**

$٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٧} \times ٣ = ٣\sqrt{٧}$

- **عند ضرب أي جذرين نضرب العددين تحت جذر واحد**

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٢ \times ٣} = \sqrt{٦}$

- **ضرب الجذور المتشابهة:**

$\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ٧$

$\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} = ٢$

- **عند ضرب الجذور نضرب:**

الإشارة × الإشارة والعدد × العدد والجذر × الجذر

$-٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٥} = -٦\sqrt{١٠}$

$-٢\sqrt{٣} \times -٤\sqrt{٣} = ٨ \times ٣ = ٢٤$

$٣\sqrt[٣]{٥} \times -٤\sqrt[٣]{٣} = -١٢\sqrt[٣]{١٥}$

العددان المترافقان

$(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ مرافقه هو $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$

$(\sqrt{٧} - ٣)$ مرافقه هو $(\sqrt{٧} + ٣)$

- ◆ **مجموع العددان المترافقان** = ٢ × الأول
- ◆ **طرح العددان المترافقان** = ٢ × الثانى
- ◆ **حاصل ضربهما** = مربع الأول ــ مربع الثانى

مثال

إذا كانت $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$

فأوجد كل مما يأتي:

١) $س + ص = ٢\sqrt{٥}$

٢) $س - ص = ٢\sqrt{٣}$

٣) $س ص = ٥ - ٣ = ٢$

٤) $(س + ص)^٢ = (٢\sqrt{٥})^٢ = ٤ \times ٥ = ٢٠$

٥) $(س - ص)^٢ = (٢\sqrt{٣})^٢ = ٤ \times ٣ = ١٢$

ملحوظة

✦ $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = (س + ص)^٢$

✦ $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ = (س - ص)^٢$

✦ $س^٢ ص^٢ = (س ص)^٢$

تدريب

إذا كانت $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٢}$

فأوجد كل مما يأتي:

١) س + ص = ...

٢) س ـ ص = ...

٣) س ص = ...

٤) $(س + ص)^٢ =$ ....

٥) $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ =$ ....

محمود عوض

جعل المقام عدد صحيح

◆ إذا كان العدد على الصورة $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$

نضرب البسط والمقام × $\sqrt{٢}$

$$\frac{٤}{\sqrt{٢}} = \frac{٤ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{٢} = ٢\sqrt{٢}$$

$$\frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{٣ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$$

◆ إذا كان العدد على الصورة $\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

نضرب البسط والمقام × مرافق المقام $(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

$$\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}{(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}$$

$$= \frac{٤(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$$

فك الأقواس

◆ **ضرب عدد × قوس** : س (أ + ب)

$$\sqrt{٢}(\sqrt{٢} + ٣) = ٣\sqrt{٢} + ٢$$

◆ **مربع القوس:** $(س + ص)^{٢}$

= مربع الأول + الأول × الثانى ×٢ + مربع الثانى

$$(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٢} = ٣ + ٢\sqrt{٦} + ٢ = ٥ + ٢\sqrt{٦}$$

$$(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})^{٢} = ٧ + ٢\sqrt{٣٥} + ٥ = ٧ + ٢\sqrt{٣٥}$$

◆ **ضرب قوسين متشابهين ما عدا في الإشارة:**

الناتج = مربع الأول ـ مربع الثانى

$$(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}) = ٣ - ٢ = ١$$

$$(\sqrt{٧} - ٣)(\sqrt{٧} + ٣) = ٧ - ٩ = -٢$$

اختصار الجذور التربيعية

١) خلى العدد اللى تحت الجذر عبارة عن حاصل ضرب عددين بشرط أن يكون عدد منهم ليه جذر تربيعى

٢) طلع العدد اللى ليه جذر بره بس خدله الجذر التربيعى

1) $\sqrt{١٨} = \sqrt{٩ \times ٢} = ٣\sqrt{٢}$

2) $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = ٥\sqrt{٢}$

3) $\sqrt{٧٢} = \sqrt{٣٦ \times ٢} = ٦\sqrt{٢}$

4) $\sqrt{٧٥} = \sqrt{٢٥ \times ٣} = ٥\sqrt{٣}$

5) $\sqrt{٤٥} = \sqrt{٩ \times ٥} = ٣\sqrt{٥}$

لو اللى جوه الجذر التربيعى كسر:

هنضرب اللى بره في نفسه مرتين وندخله جوه الجذر

6) $٤\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

اختصار الجذور التكعيبية

١) خلى العدد اللى تحت الجذر عبارة عن حاصل ضرب عددين بشرط أن يكون عدد منهم ليه جذر تكعيبى

٢) طلع الرقم اللى ليه جذر بره بس خدله الجذر التكعيبى

1) $\sqrt[٣]{١٦} = \sqrt[٣]{٨ \times ٢} = ٢\sqrt[٣]{٢}$

2) $\sqrt[٣]{٥٤} = \sqrt[٣]{٢٧ \times ٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

3) $\sqrt[٣]{٨١} = \sqrt[٣]{٢٧ \times ٣} = ٣\sqrt[٣]{٣}$

4) $\sqrt[٣]{١٢٨} = \sqrt[٣]{٦٤ \times ٢} = ٤\sqrt[٣]{٢}$

5) $\sqrt[٣]{٢٥٠} = \sqrt[٣]{١٢٥ \times ٢} = ٥\sqrt[٣]{٢}$

ملحوظة **لو اللى جوه الجذر التكعيبى كسر:**

هنضرب اللى بره في نفسه ٣ مرات وندخله جوه الجذر

6) $٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{٨ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{٤}$

7) $٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٣]{٢١٦ \times \frac{١}{٤}} = \sqrt[٣]{٥٤} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

أمثلة على العددان المترافقان

مثال ١

إذا كانت س = $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{س + ص}{س ص - ١}$

الحل

س + ص = ٢ × الأول = ٢ $\sqrt{٥}$

س ص = الأول^{٢} ـ الثانى^{٢} = ٥ ـ ٢ = ٣

$\frac{س + ص}{س ص - ١} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٣ - ١} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٢} = \sqrt{٥}$

مثال ١

إذا كانت س = $\sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

اثبت أن س ، ص مترافقان ، ثم أوجد قيمة س^{٢} ص^{٢}

الحل

ص = $\frac{٤(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}{(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٣} - \sqrt{٣})}$

= $\frac{٤(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

∴ س ، ص مترافقان (المطلوب الأول)

س^{٢} ص^{٢} = (س ص)^{٢} = (٧ ـ ٣)^{٢} = ٤^{٢} = ١٦

مثال ٣

إذا كانت س = $\frac{٣}{\sqrt{٧} - ٢}$ ، ص = $\sqrt{٧} - ٢$

اثبت أن س ، ص مترافقان ، وأوجد قيمة س^{٢}+٢س ص+ص^{٢}

الحل

أ = $\frac{٣(\sqrt{٧} + ٢)}{(\sqrt{٧} - ٢)(\sqrt{٧} + ٢)} = \frac{٣(\sqrt{٧} + ٢)}{٧ - ٤}$

= $\sqrt{٧} + ٢$

∴ س ، ص مترافقان (المطلوب الأول)

س^{٢}+٢س ص+ص^{٢} = (س + ص)^{٢} = (٢ $\sqrt{٧}$)^{٢}

= ٤ × ٧ = ٢٨

مثال ١

إذا كانت أ = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

اثبت أن أ ، ب مترافقان ، ثم أوجد قيمة

١) (أ + ب)^{٢} ٢) أ^{٢} ـ ٢ أ ب + ب^{٢} ٣) أ^{٢} ب^{٢}

٥) $\left(\frac{أ + ب}{أ ب}\right)^{٢}$ ٦) أ^{٢} + ب^{٢}

الحل

أ = $\frac{٢(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}$

= $\frac{٢(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{٥ - ٣} = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

ب = $\frac{٢(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})}{(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})}$

= $\frac{٢(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})}{٥ - ٣} = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$

∴ أ ، ب مترافقان (المطلوب الأول)

أ + ب = ٢ $\sqrt{٥}$ ، أ ـ ب = ٢ $\sqrt{٣}$

أ ب = ٥ ـ ٣ = ٢

١) (أ + ب)^{٢} = (٢ $\sqrt{٥}$)^{٢} = ٤ × ٥ = ٢٠

١) أ^{٢} ـ ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ ـ ب)^{٢} = (٢ $\sqrt{٣}$)^{٢} = ١٢

٢) أ^{٢} ب^{٢} = (أ ب)^{٢} = (٥ ـ ٣)^{٢} = ٢^{٢} = ٤

٤) $\left(\frac{أ + ب}{أ ب}\right)^{٢} = \left(\frac{٢\sqrt{٥}}{٥ - ٣}\right)^{٢} = (\sqrt{٥})^{٢} = ٥$

٤) أ^{٢} = ($\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٥ + ٢ $\sqrt{١٥}$ + ٣

= ٨ + ٢ $\sqrt{١٥}$

ب^{٢} = ($\sqrt{٥}$ ـ $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٥ ـ ٢ $\sqrt{١٥}$ + ٣

= ٨ ـ ٢ $\sqrt{١٥}$

أ^{٢} + ب^{٢} = ٨ + ٢ $\sqrt{١٥}$ + ٨ ـ ٢ $\sqrt{١٥}$ = ١٦

أمثلة على اختصار الجذور

اختصر لأبسط صورة كل مما يأتي:

١ $\sqrt{٥٠} + \sqrt{١٨} - ٤\sqrt{٩٨}$

الحل

المقدار $= \sqrt{٢٥ \times ٢} + \sqrt{٩ \times ٢} - \sqrt{٤٩ \times ٢}$

$= ٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

٢ $٢\sqrt{١٢} + ٣\sqrt{٣} - \sqrt{٧٥}$

الحل

المقدار $= ٢\sqrt{٤ \times ٣} + ٣\sqrt{٣} - \sqrt{٢٥ \times ٣}$

$= ٢ \times ٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

٣ $\sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحل

المقدار $= \sqrt{٢٥ \times ٢} - \sqrt{٩ \times ٢} + \sqrt{\frac{١}{٢} \times ١٦}$

$= ٥\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨}$

$= ٥\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٤ \times ٢}$

$= ٥\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} = ٤\sqrt{٢}$

٤ $\sqrt{٤٥} - ٢\sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥}$

الحل

المقدار $= \sqrt{٩ \times ٥} - ٢\sqrt{٤ \times ٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٢ \times ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٥}$

اختصر لأبسط صورة كل مما يأتي:

٥ $٢\sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٢٥٠}$

الحل

المقدار $= ٢\sqrt[٣]{٢٧ \times ٢} + ٣\sqrt[٣]{٨ \times ٢} - \sqrt[٣]{١٢٥ \times ٢}$

$= ٢ \times ٣\sqrt[٣]{٢} + ٣ \times ٢\sqrt[٣]{٢} - ٥\sqrt[٣]{٢}$

$= ٦\sqrt[٣]{٢} + ٦\sqrt[٣]{٢} - ٥\sqrt[٣]{٢} = ٧\sqrt[٣]{٢}$

٦ $\sqrt[٣]{٨١} + ٢\sqrt[٣]{٢٤} - ٧\sqrt[٣]{٣}$

الحل

المقدار $= \sqrt[٣]{٢٧ \times ٣} + ٢\sqrt[٣]{٨ \times ٣} - ٧\sqrt[٣]{٣}$

$= ٣\sqrt[٣]{٣} + ٢ \times ٢\sqrt[٣]{٣} - ٧\sqrt[٣]{٣}$

$= ٣\sqrt[٣]{٣} + ٤\sqrt[٣]{٣} - ٧\sqrt[٣]{٣} =$ صفر

٧ $\sqrt[٣]{١٢٨} + ٢\sqrt[٣]{٥٤} - ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

الحل

المقدار $= \sqrt[٣]{٦٤ \times ٢} + ٢\sqrt[٣]{٢٧ \times ٢} - \sqrt[٣]{\frac{١}{٤} \times ٨}$

$= ٤\sqrt[٣]{٢} + ٢ \times ٣\sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢}$

$= ٩\sqrt[٣]{٢}$

محمود عوض

التطبيقات

١ الدائرة

✸ محيط الدائرة = ٢ π نق

✸ مساحة الدائرة = π نق^{٢}

مثال ١

دائرة طول قطرها ١٤ سم احسب محيطها ومساحتها

(حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

$\because$ القطر = ١٤ سم $\therefore$ نق = ٧ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ = ١٥٤ سم^{٢}

مثال ٢

دائرة مساحتها ٣١٤ سم^{٢} احسب محيطها

(حيث π = ٣,١٤)

الحل

مساحة الدائرة = π نق^{٢} ٣١٤ = ٣,١٤ نق^{٢}

نق^{٢} = $\frac{٣١٤}{٣,١٤}$ = ١٠٠ $\therefore$ نق = ١٠ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ١٠ = ٦٢,٨ سم

مثال ٣

دائرة مساحتها ٣٦ π احسب محيطها

الحل

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

٣٦ π = π نق^{٢}

نق^{٢} = ٣٦ $\therefore$ نق = ٦ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٦ = ١٢ π سم

٢ المكعب

إذا كان طول حرف المكعب = ل فإن:

✸ مساحة الوجه الواحد = ل × ل = ل^{٢}

✸ المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢}

✸ المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}

✸ حجم المكعب = ل^{٣}

✸ طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{\text{الحجم}}$

مثال ١

مكعب طول حرفه ٥ سم

احسب مساحته الجانبية و مساحته الكلية وحجمه

الحل

مساحة الوجه الواحد = ل^{٢} = ٥ × ٥ = ٢٥ سم^{٢}

المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢} = ٤ × ٢٥ = ١٠٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = ٦ ل^{٢} = ٦ × ٢٥ = ١٥٠ سم^{٢}

حجم المكعب = ل^{٣} = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ سم^{٣}

محمود عوض

مثال ٢

مكعب حجمه ٢١٦ سم^{٣}

احسب مساحته الجانبية و مساحته الكلية

الحل

طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{\text{الحجم}}$ = $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٦ سم

مساحة الوجه الواحد = ل^{٢} = ٦ × ٦ = ٣٦ سم^{٢}

المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢} = ٤ × ٣٦ = ١٤٤ سم^{٢}

المساحة الكلية = ٦ ل^{٢} = ٦ × ٣٦ = ٢١٦ سم^{٢}

٣ الاسطوانة الدائرية القائمة

✱ **المساحة الجانبية** = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق ع

✱ **المساحة الكلية** = الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

✱ **الحجم** = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} ع

مثال ١

اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم احسب مساحتها الكلية وحجمها

الحل

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ١٠ =$ **٤٤٠** سم^{٢}

المساحة الكلية = الجانبية + ٢ π نق^{٢}

$= ٤٤٠ + ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧ =$ **٧٤٨** سم^{٢}

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

$= \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧ \times ١٠ =$ **١٥٤٠** سم^{٢}

مثال ٢

اسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٢٠٠ π وارتفاعها ١٢ سم احسب مساحتها الكلية

الحل

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

١٢٠٠ π = π نق^{٢} × ١٢

نق^{٢} = $\frac{١٢٠٠}{١٢}$ = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

= ٢ π × ١٠ × ١٢ = ٢٤٠ π

المساحة الكلية = الجانبية + ٢ π نق^{٢}

= ٢٤٠ π + ٢ π × ١٠ × ١٠

= ٢٤٠ π + ٢٠٠ π = ٤٤٠ π

٤ الكرة

✱ **حجم الكرة** = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

✱ **مساحة سطح الكرة** = ٤ π نق^{٢}

مثال ١

كرة طول نصف قطرها ٧ سم

احسب حجمها ومساحة سطحها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$= \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧ \times ٧ = \frac{٤٣١٢}{٣}$ سم^{٣}

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

$= ٤ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧ = ٦١٦$ سم^{٢}

مثال ٢

كرة حجمها ٣٦ π احسب مساحة سطحها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

نق^{٣} = ٣٦ × $\frac{٣}{٤}$ = ٢٧ نق = ٣ سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

= ٤ π × ٣ × ٣ = ٣٦ π

مثال ٢

كرة حجمها ١٥٤٣,٥ π سم^{٣} أوجد طول قطرها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

١٥٤٣,٥ π = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

١٥٤٣,٥ = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} ⟵ نق^{٣} = ١٥٤٣,٥ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = $\frac{٩٢٦١}{٨}$ ⟵ نق = ١٠,٥ سم

∴ طول القطر = ١٠,٥ × ٢ = ٢١ سم

محمود عوض

٥ متوازى المستطيلات

إذا كان الطول = س ، العرض = ص ، الارتفاع = ع

∴ محيط القاعدة = ٢(س + ص)

، مساحة القاعدة = س × ص

✸ **المساحة الجانبية** = محيط القاعدة × الارتفاع

✸ **المساحة الكلية** = الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

✸ **الحجم** = مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال ١

متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٤ سم ، ٥ سم ، ارتفاعه ٦ سم ، أوجد مساحته الكلية وحجمه

الحل

مساحة القاعدة = ٤×٥ = ٢٠

محيط القاعدة = ٢ (٤ + ٥) = ٢×٩ = ١٨

الجانبية = محيط القاعدة × ع = ١٨ × ٦ = ١٠٨ سم^2

المساحة الكلية = الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ١٠٨ + ٢ × ٢٠ = ١٠٨ + ٤٠ = ١٤٨ سم^2

الحجم = مساحة القاعدة × ع = ٢٠ × ٦ = ١٢٠ سم^3

مثال ٢

متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٥ سم ، ارتفاعه ٤ سم أوجد حجمه ومساحته الكلية

الحل

∵ القاعدة مربعة الشكل:

مساحة القاعدة = طول الضلع × نفسه = ٥×٥ = ٢٥

محيط القاعدة = طول الضلع × ٤ = ٥ × ٤ = ٢٠

الجانبية = محيط القاعدة × ع = ٢٠ × ٤ = ٨٠ سم^2

المساحة الكلية = الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٨٠ + ٢ × ٢٥ = ٨٠ + ٥٠ = ١٣٠ سم^2

الحجم = مساحة القاعدة × ع = ٢٥ × ٤ = ١٠٠ سم^3

مثال ١

أيهما أكبر حجما : أسطوانة دارية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١٠سم أم مكعب طول حرفه ١١سم

الحل

حجم الأسطوانة = π نق^2 ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ × ١٠

= ١٥٤٠ سم^3

حجم المكعب = ل^3

= ١١ × ١١ × ١١

= ١٣٣١ سم^3

∴ حجم الاسطوانة > حجم المكعب

مثال ١

كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم صُهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم احسب ارتفاع الاسطوانة

الحل

∵ طول قطر الكرة = ٦ سم ∴ نق = ٣ سم

∵ الكرة صُهرت وحولت إلى اسطوانة

∴ حجم الكرة = حجم الاسطوانة

$\frac{٤}{٣}$ π نق^3 = π نق^2 ع

$\frac{٤}{٣}$ × ٣ × ٣ × ٣ = نق^2 × ٣

٤٨ = نق^2 × ٣

نق^2 = $\frac{٤٨}{٣}$ = ١٦

∴ نق = ٤ سم

محمود عوض
تعميم محمود عوض معلم رياضيات

حل المعادلات و المتباينات

❋ مجموعة حل المعادلة عبارة عن مجموعة

❋ مجموعة حل المتباينة عبارة عن فترة

❋ عند ضرب أو قسمة طرفى المتباينة في عدد سالب نغير علامة التباين.

فمثلا: ـ٢ س > ٦ ⟸ س < ـ٣

(١) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة:

$\sqrt{3}$ س + ٢ = ٥ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$\sqrt{3}$ س = ٥ ـ ٢ ⟸ $\sqrt{3}$ س = ٣

س = $\frac{3}{\sqrt{3}}$ = $\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ = $\sqrt{3}$

∴ م . ح = { $\sqrt{3}$ }



(٢) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة:

س ـ $\sqrt{2}$ = ١

الحل

س = ١ + $\sqrt{2}$ ∈ ح ∴ م . ح = { ١ + $\sqrt{2}$ }

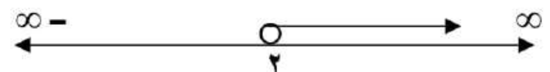
(٣) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة:

٢س ـ ١ > ٣

الحل

٢س > ٣ + ١ ⟸ ٢س > ٤ ⟸ س > $\frac{4}{2}$

س > ٢ ∴ م . ح =] ٢ ، ∞ [



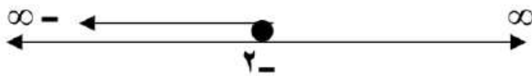
(٤) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة:

٥ ـ ٣س ≤ ١١

الحل

ـ٣ س ≤ ١١ ـ ٥ ∴ ـ٣ س ≤ ٦ هنغير العلامة

س ≥ $\frac{6}{-3}$ ⟸ س ≥ ـ٢ ⟸ م . ح = [ـ٢ ، ∞ [



(٥) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة:

ـ٣ ≤ ٢س ـ ١ < ٥

الحل

ـ٣ + ١ ≤ ٢س < ٥ + ١

ـ٢ ≤ ٢س < ٦ (÷ ٢)

ـ١ ≤ س < ٣ ∴ م.ح = [ـ١ ، ٣[



(٦) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة:

٥س ـ ٣ > ٣س + ٧

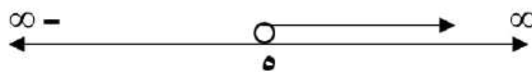
الحل

خلى السينات قبل = والأعداد المطلقة بعد =

٥س ـ ٣س > ٧ + ٣

∴ ٢س > ١٠ ∴ س > ٥

م.ح =]٥ ، ∞ [



العلاقة بين متغيرين

✹ أ س + ب ص = جـ تسمى علاقة خطية

✹ يوجد عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة تحقق العلاقة

✹ العلاقة الخطية تمثل بيانيا بخط مستقيم.

✹ لتمثيل العلاقة خلى الـ ص لوحدها ص =أس+جـ
وافرض قيم للـ س من دماغك وعوض بيها في العلاقة

١ أوجد ثلاثة أزاوج مرتبة تحقق العلاقة:

س + ص = ٣

الحل

نخلى الـ ص لوحدها: ص = ٣ ـ س

نضع س = ١ ∴ ص = ٣ ـ ١ = ٢

∴ (١ ، ٢) يحقق العلاقة

نضع س = ٢ ∴ ص = ٣ ـ ٢ = ١

∴ (٢ ، ١) يحقق العلاقة

نضع س = ٣ ∴ ص = ٣ ـ ٣ = ٠

∴ (٣ ، ٠) يحقق العلاقة

٢ أوجد ثلاثة أزاوج مرتبة تحقق العلاقة:

٢س ـ ص = ٢

الحل

نخلى الـ ص لوحدها: ـ ص = ٢ ـ ٢س

ص = ـ ٢ + ٢س

نضع س = ١ ∴ ص = ـ٢ + ٢ × ١ = ٠

∴ (١ ، ٠) يحقق العلاقة

نضع س = ٢ ∴ ص = ـ٢ + ٢ × ٢ = ٢

∴ (٢ ، ٢) يحقق العلاقة

نضع س = ٣ ∴ ص = ـ٢ + ٢ × ٣ = ٤

∴ (٣ ، ٤) يحقق العلاقة

٣ إذا كان (٢ ، ٣) يحقق العلاقة ٢س ـ ك ص = ١٠
فأوجد قيمة ك

الحل

من الزوج (٢ ، ٣) نأخذ س = ٢ ، ص = ٣

ونعوض في العلاقة ٢س ـ ك ص = ١٠

∴ ٢ × ٢ ـ ك × ٣ = ١٠

٤ ـ ٣ ك = ١٠

ـ٣ ك = ١٠ ـ ٤

ـ٣ ك = ٦ ∴ ك = $\frac{٦}{ـ٣}$ = ـ٢

٤ إذا كان (ك ، ٢ك) يحقق العلاقة س + ص = ٣٠
فأوجد قيمة ك

الحل

من الزوج (ك ، ٢ك) نأخذ س = ك ، ص = ٢ك

∴ ك + ٢ ك = ٣٠

٣ ك = ٣٠ ∴ ك = ١٠

✹ لإيجاد نقطة التقاطع مع **محور السينات** نضع ص = ٠
✹ لإيجاد نقطة التقاطع مع **محور الصادات** نضع س = ٠

٥ إذا كانت ٢س + ٣ ص = ٦
فأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محور السينات والصادات

الحل

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ٢س + ٣ × ٠ = ٦ ٢س = ٦ س = ٣

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (٣ ، ٠)

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ٢×٠ + ٣ ص = ٦ ٣ص = ٦ ص = ٢

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (٠ ، ٢)

محمود عوض

٥ مثل بيانيا العلاقة : ص = ٢س ـ ١

الحل

نضع س = ٠ ∴ ص = ٢ × ٠ ـ ١ = ـ ١

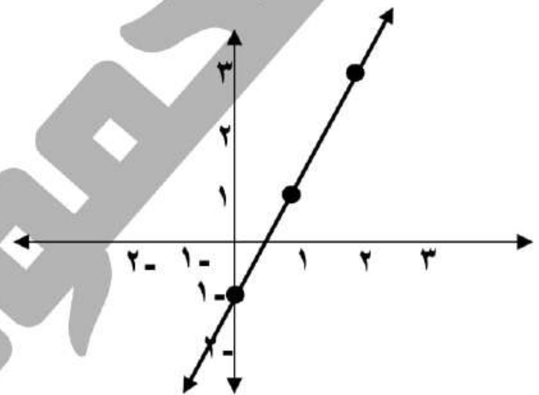
∴ (٠ ، ـ١) يحقق العلاقة

نضع س = ١ ∴ ص = ٢ × ١ ـ ١ = ١

∴ (١ ، ١) يحقق العلاقة

نضع س = ٢ ∴ ص = ٢ × ٢ ـ ١ = ٣

∴ (٢ ، ٣) يحقق العلاقة



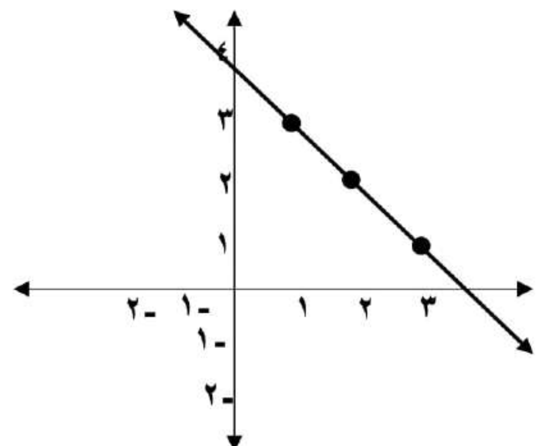
٦ مثل بيانيا العلاقة : س + ص = ٤

الحل

نخلى الـ ص لوحدها: ص = ٤ ـ س

وممكن نعمل فكرة الجدول بس نعوض بره الجدول

س	١	٢	٣
ص	٣	٢	١



الميل

✱ ميل المستقيم = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

✱ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر

✱ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

✱ لإثبات أن النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

نثبت أن: ميل أ ب = ميل ب جـ

١ أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤، ـ٤) ، (٧،٥)

الحل

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - -٤}{٧ - ٤} = \frac{٩}{٣} = ٣$

٢ اثبت أن النقط أ (١،٢) ، ب (ـ١،٣) ، جـ (٥،٠)

تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٢}{-١ - ١} = \frac{١}{-٢} = -\frac{١}{٢}$

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٠ - ٣}{٥ - -١} = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

∵ ميل أ ب = ميل ب جـ ∴ النقط على استقامة واحدة

٣ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤، ص) ، (ـ١ ، ٥) يساوى ٣ فأوجد قيمة ص

الحل

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ $\frac{ص - ٥}{٤ - -١} = ٣$

$\frac{ص - ٥}{٥} = ٣$ ⟸ ص ـ ٥ = ٣ × ٥

ص ـ ٥ = ١٥ ⟸ ص = ١٥ + ٥ = ٢٠

محمود عوض

زمن الإمتحان ٤٥ دقيقة

((مدرسة ....))

الإســـم / .... الفصل / ....

الدرجة

السؤال الأول :- إختر الإجابة الصحيحة فما يلي : -

١ حجم مكعب طول حرفه ٧ سم = ... سم^{٣} (درجة)

(أ) ٧	(ب) ١٢٥	(ج) ٣٤٣	(د) ١٠٠٠

٢ $\sqrt{٢٠} + \sqrt{٨٠} - ٢\sqrt{٤٥}$ = ... (درجة)

(أ) ٢	(ب) ٣	(ج) -١	(د) صفر

٣]-∞ ، ∞[= .... (درجة)

(أ) ح	(ب) ط	(ج) ص	(د) ح$^{+}$

السؤال الثاني :- أكمل ما يأتي :-

١ حجم متوازي مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ سم = ... سم^{٣} (درجة)

٢ حاصل ضرب العدد ($\sqrt{٥} - ٤$) ومرافقه = ... (درجة)

٣ المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ = ... (درجة)

السؤال الثالث :-

أ **إذا كانت** س = [-٢ ، ٣] ، ص =]١ ، ٥] (درجتان)

أوجد ① س ∪ ص ② س ∩ ص

ب **إختصر لأبسط صورة :** (درجتان)

$$٢\sqrt[٣]{٣٢} - ٣\sqrt[٣]{٤} + ٨\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}}$$

إنتهت الاسئلة بالتوفيق ...

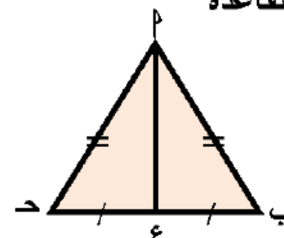
مستر/علي محمود حسان ٠١٠٦٠٠٢٣٧٨٩

الدرس الرابع : نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١) :

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = أ حـ ، أ ء متوسط فإن :

(١) أ ء ينصف ∠ ب أ حـ

أى أن : ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

(٢) أ ء ⊥ ب حـ

ملاحظة :

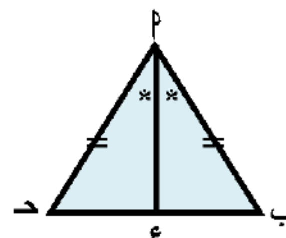
Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء لأن : أ ء ضلع مشترك ،

أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ ء

نتيجة (٢) :

منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = أ حـ ، أ ء ينصف ∠ ب أ حـ فإن :

(١) ء منتصف ب حـ أى أن : ب ء = ء حـ

(٢) أ ء ⊥ ب حـ

ملاحظة :

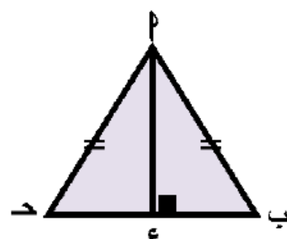
Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء لأن : أ ء ضلع مشترك ،

أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

نتيجة (٣) :

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = أ حـ ، أ ء ⊥ ب حـ فإن :

(١) ء منتصف ب حـ

أى أن : ب ء = ء حـ

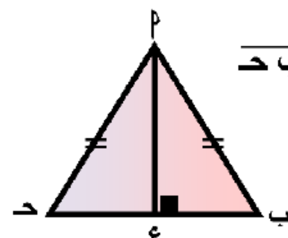
(٢) ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

ملاحظة :

Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء لأن : أ ء ضلع مشترك ،

أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°

(١) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، أ ء ⊥ ب حـ

، ق (∠ ب أ ء) = ٣٢°

، ب حـ = ٦ سم أوجد :

ق (∠ ب أ حـ) ، طول ب ء

أحمد الشتورى

(٢) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ب حـ

، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، أ ء = ٤ سم أوجد :

طول $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ ء ب حـ)

ثم أستنتج أن : Δ ب ء حـ متساوى الساقين

(٣) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ هـ ، ب حـ = هـ ء ،

ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ هـ ء)

، حـ و = و ء برهن أن :

$\overline{\text{أ و}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

أحمد الشتورى

محاور التماثل :

أولاً : محاور تماثل للمثلث المتساوى الساقين :

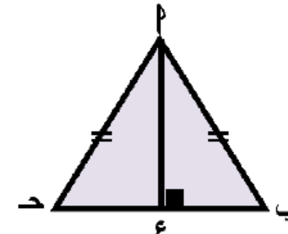
محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ﺃ ب ﺣ فيه :

ﺃ ب = ﺃ ﺣ ، ﺃ ء ⊥ ب ﺣ فإن :

ﺃ ء هو محور تماثل للمثلث ﺃ ب ﺣ المتساوى الساقين



ملاحظات :

١) المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط

٢) المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل

٣) المثلث المختلف الأضلاع له محاور تماثل

ثانياً : محاور تماثل القطعة المستقيمة :

يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة

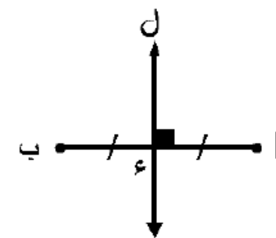
و للاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة

ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء منتصف ﺃ ب ،

المستقيم ل ⊥ ﺃ ب حيث : ء ∈ ل

فإن : المستقيم ل هو محور تماثل ﺃ ب



خاصية :

أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : المستقيم ل محور تماثل ﺃ ب

فإن :

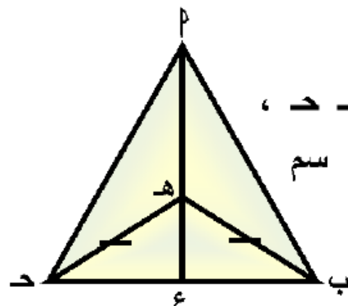
١) إذا كان : ﺣ ∈ ل فإن :

ﺃ ﺣ = ب ﺣ

٢) إذا كان : ﻫ ﺃ = ﻫ ب فإن :

ﻫ ∈ ل لأن : عكس الخاصية صحيح

فإذا كانت هناك نقطة على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة



(٤) فى الشكل المقابل :

ﺃ ب = ﺃ ﺣ = ١٣ سم ، ﻫ ب = ﻫ ﺣ ،

ﺃ ﻫ ∩ ب ﺣ = { ء } ، ب ﺣ = ١٠ سم

اوجد طول كل من : ﺣ ء ، ﺃ ء

ﺃ
ب
ﺣ
ء
ﻫ

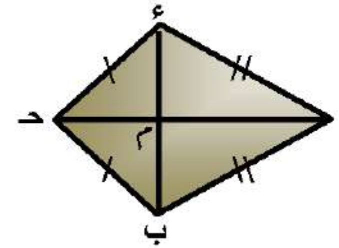
أحمد الشتوى

(٥) في الشكل المقابل :

$\overline{بء} \cap \overline{أحـ} = \{ م \}$ ، أب = أء

، بحـ = ءحـ أثبت أن :

م منتصف $\overline{بء}$

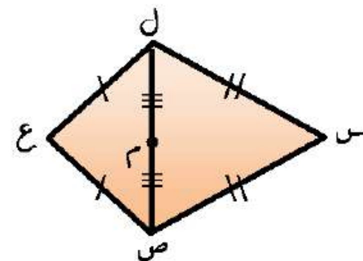


(٦) في الشكل المقابل :

س ص = س ل ، ع ص = ع ل

، ل م = ص م أثبت أن :

س ، م ، ع على استقامة واحدة

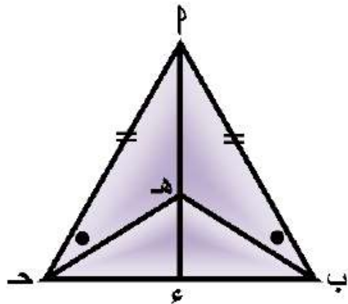


(٧) في الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ،

ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

أثبت أن : $\overleftrightarrow{أهـ}$ محور $\overline{ب حـ}$

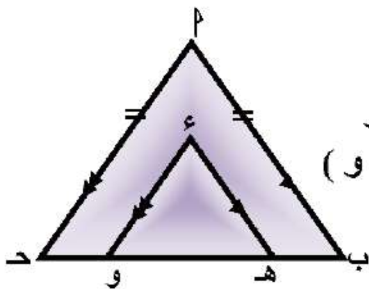


(٨) في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{أ ب}$ ،

$\overline{ء و}$ // $\overline{أ حـ}$ أثبت أن : ء هـ = ء و

، ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ هـ ء و)



أحمد الشتوى

(٩) أكمل ما يلى :

[١] المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة يسمى ....

[٢] المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى ....

[٣] أى نقطة تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها

[٤] فى Δ ا ب حـ إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق(∠ ا) = ٦٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

[٥] فى Δ ا ب حـ إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق(∠ ب) = ٥٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...

[٦] إذا كان Δ ا ب حـ له محور تماثل واحد و فيه : ق(∠ ا ب حـ) = ١٢٠° فإن : ق(∠ ا) = ...°

[٧] العمود الساقط من رأس المثلث المتساوى الساقين على القاعدة ينصف كلاً من .... ، ....

[٨] الشعاع المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف .... و يكون ....

(١٠) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان طول أى ضلع فى مثلث = $\frac{1}{3}$ محيط المثلث فإن : عدد محاور تماثل المثلث = ...
(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٢] فى المعين س ص ع ل يكون : $\overline{\text{س ع}}$ محور تماثل هو ....
($\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$)

[٣] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هو محور تماثل $\overline{\text{ا ب}}$ فإن : ....
(ا س = ب ص ، ا س = ب س ، ب ص = س ص ، ا ص = ب س)

[٤] إذا كان : ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ا ء ، ب حـ = ء حـ فإن : $\overleftrightarrow{\text{ا حـ}}$ .... $\overline{\text{ب ء}}$
(يوازى ، عمودى على ، محور تماثل ، يطابق)

[٥] إذا كان : Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ ا) = ٥٠° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...
(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٦] إذا كان : Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ ا) = ٤٥° فإن : عدد محاور تماثل Δ ا ب حـ = ...
(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

[٧] المستقيم العمودى على القكعة المستقيمة من منتصفها يسمى .... لها
(موازى ، منصف ، متوسط ، محور تماثل)

الوحدة الخامسة   التباين

الدرس الأول : التباين

مفهوم التباين :

نعلم أن :

علاقة التباين هى العلاقة التى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين و نعبر عنها بإحدى العلامتين : > (أكبر من) ، (أصغر من) و تسمى كل منهما متباينة أو علاقة تباين
و لما كانت أطوال القطع المستقيمة و كذلك قياسات الزوايا عبارة عن أعداد لذا تستخدم علاقة التباين للمقارنة بين طولى قطعتين مستقيمتين أو قياسى زاويتين

فمثلاً :

١) إذا كان : ٲ ب = ٦ سم ، حـ ء = ٤ سم فإن :
ٲ ب > حـ ء   أو   حـ ء < ٲ ب

٢) إذا كان : ق(∠ ٲ) = ٦٠° ، ق(∠ ب) = ٤٢° فإن :
∠ ٲ > ∠ ب   أو   ∠ ب < ∠ ٲ

(١) أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :

[١] إذا كانت ∠ ٲ حادة فإن : ق(∠ ٲ) .... ٩٠°

[٢] إذا كانت ∠ ب منفرجة فإن : ق(∠ ب) .... ٩٠°

[٣] إذا كان : س ص = ٣ سم ، ل ع = ٥ سم
فإن : ل ع .... س ص

أحمد الشنتورى

(٢) فى الشكل المقابل :

[١] أكمل :

١) ق(∠ ٲ ء ب) = ... °

٢) ق(∠ ٲ حـ هـ) = ... °

[٢] أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :

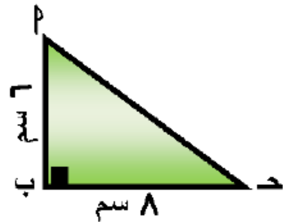
١) ق(∠ ٲ حـ هـ) = ... ق(∠ ء ٲ حـ)

٢) ق(∠ ٲ حـ ء) = ... ق(∠ ٲ ء ب)

٣) ق(∠ ٲ ء حـ) = ... ق(∠ ٲ ب ء)

٤) ق(∠ ٲ ء حـ) = ... ق(∠ ٲ حـ هـ)

(٣) فى الشكل المقابل أكمل ما يلى مستخدماً علامة (> أو <) :



[١] ٲ ب .... ب حـ

[٢] ٲ حـ .... ب حـ

[٣] ٲ حـ .... ٲ ب

[٤] ق(∠ ٲ) .... ق(∠ ب)

[٥] ق(∠ حـ) .... ق(∠ ب)

مسلمات التباين :

لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع :

[١] إذا كان : س > ص فإن : س + ع > ص + ع

[٢] إذا كان : س > ص فإن : س − ع > ص − ع

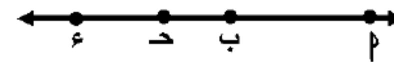
[٣] إذا كان : س > ص ، ع عدداً موجباً
فإن : س ع > ص ع

[٤] إذا كان : س > ص ، ص > ع فإن : س > ع

[٥] إذا كان : س > ص ، ٩ > ب
فإن : س + ٩ > ص + ب

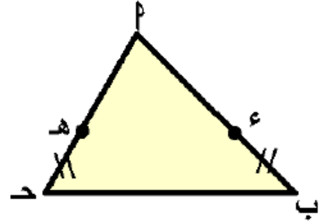
(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : حـ ∈ ٩ب↔ ، ء ∈ ٩ب↔
، كان : ٩ ب > حـ ء
أثبت أن : ٩ حـ > ب ء



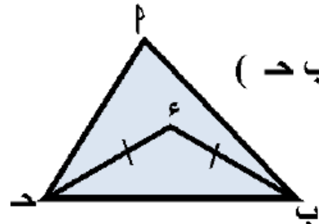
(٥) فى الشكل المقابل :

Δ ٩ ب حـ فيه : ٩ ب > ٩ حـ ،
ب ء = حـ هـ أثبت أن :
٩ ء > ٩ هـ



(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ ٩ حـ ب) > ق(∠ ٩ ب حـ)
، ء ب = ء حـ أثبت أن :
ق(∠ ٩ حـ ء) > ق(∠ ٩ ب ء)



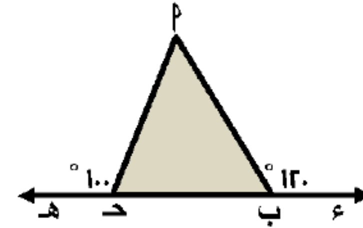
أحمد الشتورى

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ ٢ ب ء) = ١٢٠°

، ق(∠ ٢ حـ هـ) = ١٠٠°

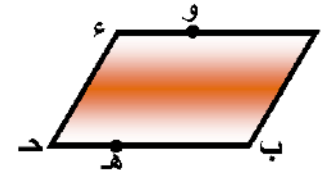
رتب قياسات زوايا △ ٢ ب حـ تصاعدياً



(٨) فى الشكل المقابل :

٢ ب حـ ء متوازى أضلاع ، ء و > ب هـ

أثبت أن : ٢ و + ٢ ب > حـ هـ + حـ ء



(٩) أكمل ما يلى :

[١] إذا كان : ٢ ، ب ، حـ أعداد موجبة ، و كان : ٢ > ب

فإن : ٢ + حـ .... ب + حـ

[٢] إذا كان : ٢ ، ب ، حـ أعداد موجبة ، و كان : ٢ > ب

، ب > حـ فإن : ٢ .... حـ

[٣] إذا كان : ق(∠ ٢) > ق(∠ ب) فإن :

∠ ٢ مكملة .... ∠ ب مكملة

[٤] إذا كانت النقط : ٢ ، ب ، حـ ، ء على استقامة واحدة ، و كان

٢ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٤ سم

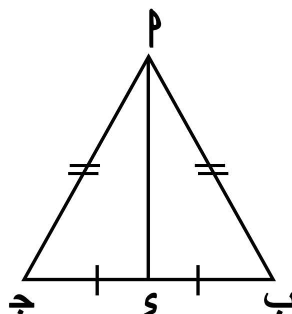
فإن : ٢ حـ .... ب ء

[٥] إذا كان : ٢ء⃖ ينصف ∠ ب ٢ حـ فإن :

ق(∠ ب ٢ ء) .... ق(∠ ب ٢ حـ)

نتائج على نظريات المثلث متساوى الساقين

نتيجة ١ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة



فى Δ م ب جـ

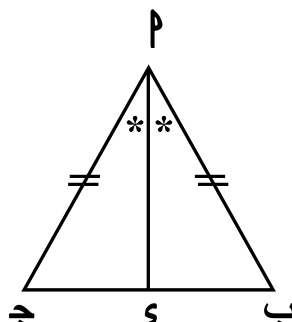
∵ م ب = م جـ

∵ م ء ينصف ب جـ

∴ م ء ينصف (∠ م)

∴ م ء ⊥ ب جـ

نتيجة ٢ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها



فى Δ م ب جـ

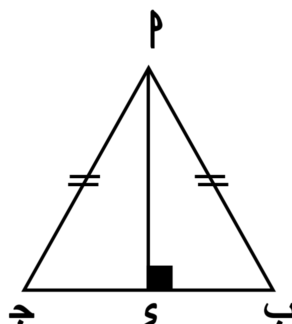
∵ م ب = م جـ

∵ م ء ينصف (∠ م)

∴ م ء ينصف ب جـ

∴ م ء ⊥ ب جـ

نتيجة ٣ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس



فى Δ م ب جـ

∵ م ب = م جـ

∵ م ء ⊥ ب جـ

∴ م ء ينصف ب جـ

∴ م ء ينصف (∠ م)

(١) فى الشكل المقابل

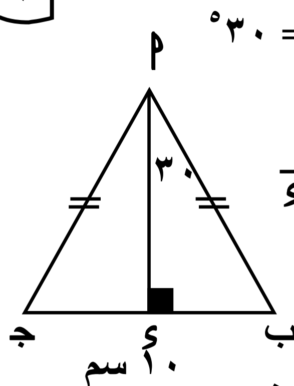
م ب = م جـ ، ق(∠ب م ء) = ٣٠°

، م ء ⊥ ب جـ

ب جـ = ١٠ سم

أوجد طول كل من ب ء ، م ء

و مساحة Δ م ب جـ



فى Δ م ب جـ متساوى الساقين

∵ م ب = م جـ

∵ م ء ⊥ ب جـ

∴ م ء ينصف (∠ م)

∴ م ء ينصف ب جـ

∵ ب جـ = ١٠ سم ∴ ب ء = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

فى Δ م ب ء القائم الزاوية في ء

∵ ق(∠ب م ء) = ٣٠°

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ م ب

∴ م ب = ٥ × ٢ = ١٠ سم

فى Δ م ب ء القائم الزاوية في ء

(م ء)^{٢} = (م ب)^{٢} - (ب ء)^{٢}

(م ء)^{٢} = (١٠)^{٢} - (٥)^{٢}

(م ء)^{٢} = ١٠٠ - ٢٥ = ٧٥

م ء = $\sqrt{٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع

مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × م ء

مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ $\sqrt{٢}$

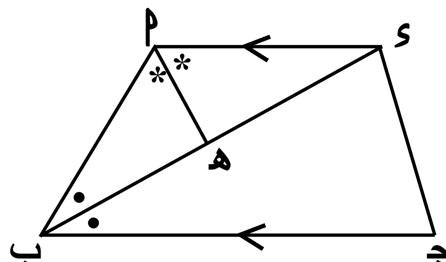
= ٢٥ $\sqrt{٢}$ سم^{٢}

(٢) فى الشكل المقابل

أ هـ ينصف (∠ ء أ ب)، ب هـ ينصف (∠ أ ب جـ)

أ ء // جـ ب اثبت أن أ ب = أ ء ، ب هـ = هـ ء

، أ هـ ⊥ ب ء



∵ أ ء // جـ ب ، ء ب قاطع لهما

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل (١)

، ∵ ب هـ ينصف (∠ أ ب جـ)

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ ء ب جـ) (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ب ء)

∴ أ ب = أ ء (م١)

فى Δ أ ء ب متساوى الساقين

∵ أ ب = أ ء

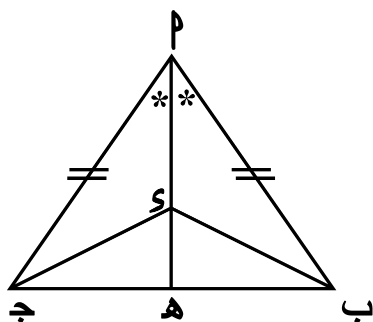
∵ أ هـ ينصف (∠ أ)

∴ أ هـ ينصف ب ء ∴ ب هـ = هـ ء (م٢)

∴ أ هـ ⊥ ب ء (م٣)

(٣) فى الشكل المقابل أ هـ ينصف (∠ ب أ جـ)

أ ب = أ جـ اثبت أن ب هـ = هـ جـ ، ب ء = جـ ء



فى Δ أ ب جـ متساوى الساقين

∵ أ ب = أ جـ

∵ أ هـ ينصف (∠ أ)

∴ أ هـ ينصف ب جـ ∴ ب هـ = هـ جـ (م١)

∴ أ هـ ⊥ ب جـ

فى Δ ب ء جـ

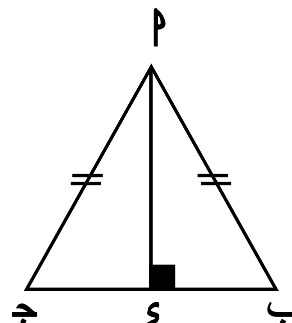
∵ ء هـ ينصف ب جـ

∵ ء هـ ⊥ ب جـ

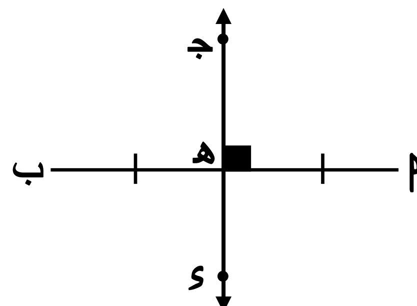
∴ ء ب = ء جـ (م٢)

∴ ء هـ ينصف (∠ ب ء جـ)

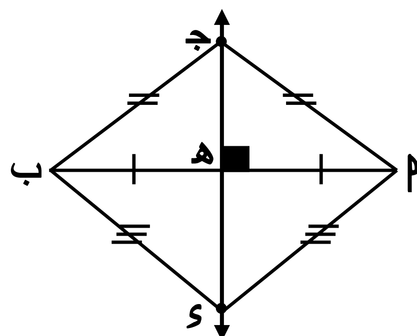
محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته



محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها



أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها



عدد محاور تماثل المثلث متساوى الأضلاع = ٣
عدد محاور تماثل المثلث متساوى الساقين = ١
عدد محاور تماثل المثلث مختلف الأضلاع = ٠

التباين

مسلمات التباين

إذا كان س ، ص ، ع ، ل ، أ ، ب أعداد حقيقية

(١) إذا كان س > ص فإن س+ع > ص+ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س+ع > ص+ع   ٧+٣ > ٥+٣   ١٠ > ٨

(٢) إذا كان س > ص فإن س-ع > ص-ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س-ع > ص-ع   ٧-٣ > ٥-٣   ٤ > ٢

(٣) إذا كان س > ص ، ع عدداً موجباً ع > ٠
فإن س ع > ص ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س ع > ص ع   ٧×٣ > ٥×٣   ٢١ > ١٥

(٤) إذا كان س > ص ، ع عدداً سالباً ع < ٠
فإن س ع > ص ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = - ٣
س > ص   ٧ > ٥
س ع < ص ع
٧×-٣ < ٥×-٣   - ٢١ < -١٥

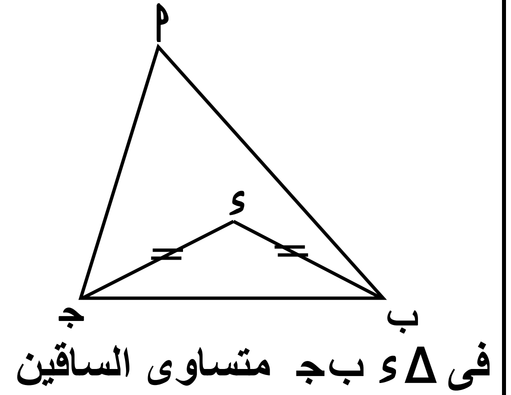
(٥) إذا كان س > ص ، ص > ع فإن س > ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥ ، ص > ع   ٥ > ٣
فإن س > ع   ٧ > ٣

(٦) إذا كان س > ص ، أ > ب
فإن س+أ > ص+ب
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، أ = ٣ ، ب = ١
٧+٣ > ٥+١   ١٠ > ٦

(١) فى الشكل المقابل

ءب = ءجـ ، ق(∠ﻢجـب) > ق(∠ﻢب جـ)

اثبت أن ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠ﻢب ء)



فى Δ ء ب جـ متساوى الساقين

∵ ء ب = ء جـ

∴ ق(∠ ء ب جـ)=ق(∠ ء جـ ب) [١]

∵ ق(∠ﻢجـب) > ق(∠ﻢب جـ) [٢]

بطرح ١ من ٢

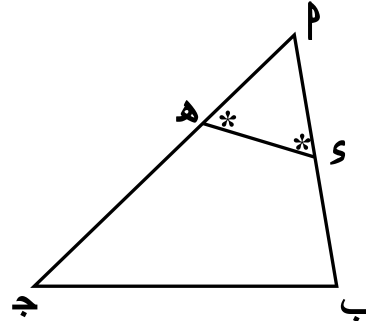
∴ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠ﻢب ء)

---

(٢) فى الشكل المقابل

ق(∠ﻢءهـ) = ق(∠ﻢهـ ء)، ﻢجـ > ﻢب

اثبت أن جـهـ > ب ء



فى Δ ﻢ ءهـ

∵ق(∠ ﻢ ءهـ)=ق(∠ ﻢ ءهـ)

∴ ﻢهـ = ﻢ ء [١]

∵ﻢجـ > ﻢب [٢]

بطرح ١ من ٢

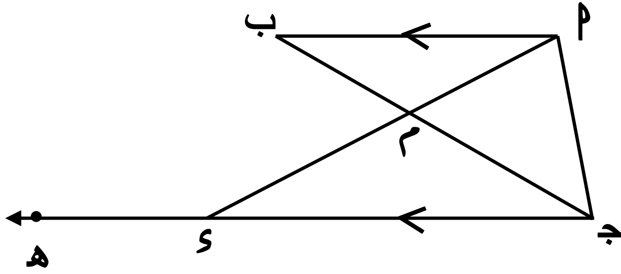
∴جـهـ > ب ء

(٢) فى الشكل المقابل

$\overline{ﻢب}$ // $\overleftarrow{جـهـ}$ اثبت أن

ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠ﻢب جـ)

ق(∠ﻢءهـ) > ق(∠ﻢب جـ)



∵ $\overline{ﻢب}$ // $\overleftarrow{جـهـ}$ ، $\overline{بجـ}$ قاطع لهما

∴ق(∠ﻢب جـ) = ق(∠بجـ ء) بالتبادل [١]

∵ق(∠ﻢجـ ء) = ق(∠ﻢجـب)+ ق(∠بجـ ء)

∴ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠بجـ ء) [٢]

من ١ ، ٢

∴ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠ﻢب جـ) 

∵ (∠ﻢءهـ) خارجة عن Δ ﻢجـء

∴ق(∠ﻢءهـ) = ق(∠جـﻢ ء)+ ق(∠ﻢجـ ء)

∴ق(∠ﻢءهـ) > ق(∠ﻢجـ ء)

، ∵ق(∠ﻢجـ ء) > ق(∠ﻢب جـ) برهاناً

∴ق(∠ﻢءهـ) > ق(∠ﻢب جـ) 

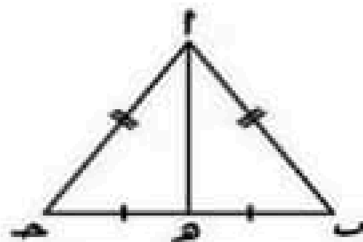
تمارين على نتائج المثلث المتساوى الساقين

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

أثبت أن :

$\overline{أ هـ} \perp \overline{ب جـ}$



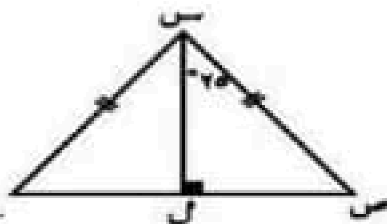
(٢) فى الشكل المقابل :

س ص = س ع ، $\overline{س ل} \perp \overline{ص ع}$ ،

ص ع = ٨ سم ، ق (∠ ص س ل) = ٢٥°

أوجد (١) طول $\overline{ص ل}$

(٢) ق (∠ ع س ل)



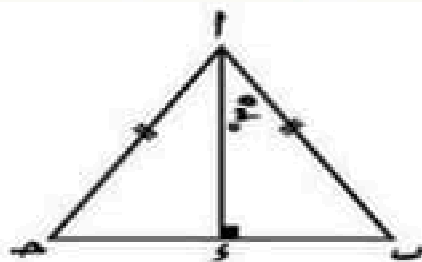
(٣) فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ فيه $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ،

ب جـ = ٤ سم ، أ ب = أ جـ ،

ق (∠ ب أ ء) = ٣٥°

أوجد ق (∠ ء أ جـ) ، طول $\overline{ء جـ}$



(٤) فى الشكل المقابل :

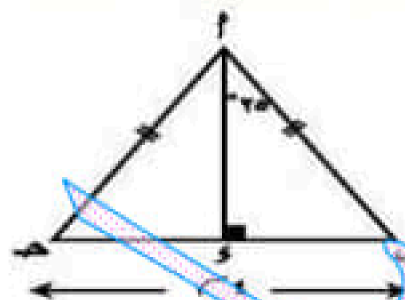
△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ،

$\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥° ،

ب جـ = ٤ سم

أوجد (١) ق (∠ ب أ جـ)

(٢) طول $\overline{ب ء}$



★ التباين :

❶ Δ ا ب حـ فيه : ا ب > ا حـ فإن : ق(∠ ب) .... ق(∠ حـ)

(ا) > (ب) < (حـ) = (ء) ≤

❷ إذا كان Δ ء هـ و فيه : ء هـ = ٥ سم ، هـ و = ٨ سم ، ء و = ٦ سم

فإن : أكبر زواياه في القياس هي ....

(ا) حـ (ب) ء (حـ) هـ (ء) و

❸ Δ س ص ع فيه : ق(∠ ع) = ٧٠° ، ق(∠ ص) = ٦٠° فإن : ص ع .... س ص

(ا) > (ب) < (حـ) = (ء) ≤

❹ Δ ا ب حـ فيه : ق(∠ ا) = ق(∠ ب) + ١٥° فإن : ب حـ .... ا حـ

(ا) > (ب) < (حـ) = (ء) ≥

❺ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فإن : س ع .... ص ع

(ا) > (ب) < (حـ) = (ء) ≥

❻ Δ ا ب حـ فيه : ق(∠ ا) = ١٣٠° يكون أطول أضلاعه طولاً هو ....

(ا) $\overline{اب}$ (ب) $\overline{بحـ}$ (حـ) $\overline{احـ}$ (ء) $\overline{حـء}$

❼ في أي مثلث يكون مجموع طولي ضلعين .... طول الضلع الثالث

(ا) أكبر من (ب) أصغر من (حـ) يساوي (ء) ضعف

❽ في المثلث ا ب حـ يكون ا ب .... ب حـ + ا حـ

(ا) > (ب) < (حـ) = (ء) ≥

❾ الأطوال التي تصلح أن تكون أضلاع مثلث هي ....

(ا) (٠،٣،٥) (ب) (٣،٣،٦) (حـ) (٣،٣،٥) (ء) (٣،٣،٧)

❿ مثلث متساوي الساقين فيه طولا ضلعين ٤ سم ، ٩ سم

فإن طول الضلع الثالث = ... سم

(ا) ٤ (ب) ٥ (حـ) ٩ (ء) ١٣

⓫ إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٥ سم ، ١٠ سم وله محور تماثل واحد

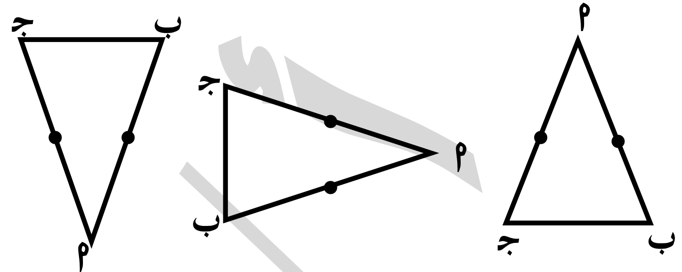
فإن محيطه = ... سم

(ا) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (ء) ٢٥

⓬ إذا كان Δ ا ب حـ فيه : ا ب = ٣ سم ، ا حـ = ٥ سم فإن : ا حـ ∋ ....

(ا) [٢ ، ٨] (ب)] ٢ ، ٨ [(حـ)] ٢ ، ٨] (ء) [٢ ، ٨ [

المثلث المتساوي الساقين



❖ الساقين هما .... ، ....

❖ القاعدة .... زاوية الرأس ....

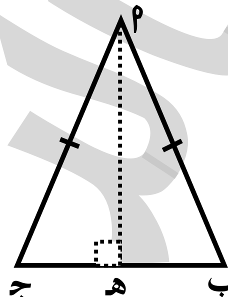
❖ زاويتا القاعدة .... ، ....

فـي الشكل المقابل أب = أج

إثبت أن

ق (ب^) = ق (ج^)

العمل: ارسم $\overline{أهـ} \perp \overline{ب ج}$



△ .... ، .... △

فيهما .... ، .... ، ....

∴ △ △ متطابقان وينتج أن ....

زاويتا القاعده في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

❖ إذا كان قياس زاوية الـرأس في مثلث متساوي الساقين ٧٠° فإن قياس كل مـن زاويتا القاعـدة ....

❖ إذا كان قياس زاوية القاعده في مثلث متساوي الساقين ٥٠° فإن قياس زاوية الراس..........

❖ إذا كان قياس زاوية في مثلث متساوي الساقين ٦٠° فإن المثلث يكون ....

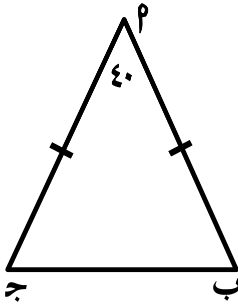
❖ △ أ ب ج فيه أ ب = أ ج

ق (ب^) = ٥٠° فإن ق (أ^) = ...

❖ △ أ ب ج في أ ب = أ ج

ق (أ^) = ١٢٠° فإن ق (ب^) = ...

① إوجد ق (ب^)



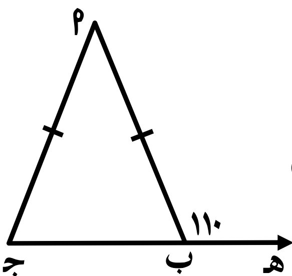
∵ أ ب = ...

∴ ق (ب^) = ق (...^)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

∴ ق (ب^) = ق (...^) = ...°

② إوجد ق (أ^)



∵ أ ب = ...

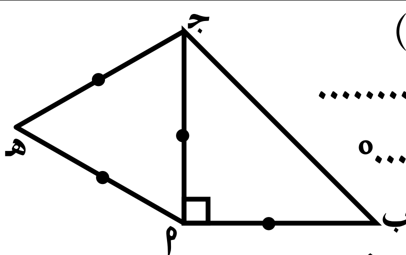
∴ ق (أ ب^ ج) = ق (...^)

∵ ق (هـ ب^ ج) = ...°

∴ ق (أ ب^ ج) = ...°

∴ ق (ج^) = ...° ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ... ∴ ق (أ^) = ...°

③ إوجد ق (ب ج^ هـ)



∵ △ أ ج هـ متساوي ....

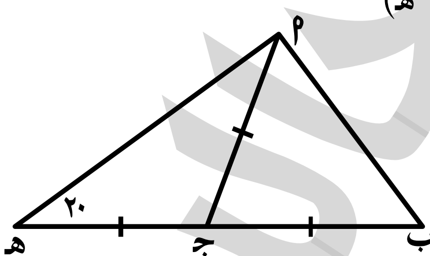
∴ ق (أ ج^ هـ) = ...°

∵ أ ب = أ ج

∴ ق (أ ج^ ب) = ق (...^) ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ... ∴ ق (أ ج^ ب) = ...°

∴ ق (ب ج^ هـ) = ... + ... = ...°

④ إوجد ق (ب أ^ هـ)



∵ أ ج = ج هـ

∴ ق (ج أ^ هـ) = ق (...^) = ...°

∴ ق (أ ج^ ب) = ... + ... = ...°

∵ أ ج = ج ب ∴ ق (ج أ^ ب) = ق (...^)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

∴ ق (ج أ^ ب) = ...°

ق (ب أ^ هـ) = ... + ... = ...°

⑤ إوجد ق(∠أ جـ هـ)

∵ أ جـ = أ ب

∴ ق(∠...) = ق(∠...)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

١٨٠ − ٧٠ = ... ∴ ق(∠أ جـ ب) = ...°

∵ هـ جـ = هـ ب ∴ ق(∠...) = ق(∠...)

١٨٠ − ١٢٠ = ... ∴ ق(∠هـ جـ ب) = ...°

∴ ق(∠أ جـ هـ) = ... − .... = ...°

⑥ إوجد ق(∠ب)

∵ أ هـ // ب جـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠...)

= ....° بالتبادل

∵ أ جـ = جـ ب ∴ ق(∠ب) = ق(∠...)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

∴ ق(∠ب) = ...°

⑦ إثبت أن : ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ جـ هـ)

∵ أ جـ = أ ب

∴ ق(∠أ ب جـ)

= ق(∠...) ⟵ (١)

∵ هـ جـ = هـ ب

∴ ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠...) ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ جـ هـ)

⑧ إوجد ق(∠ب)

∵ ق(∠أ هـ جـ) = ...°

∴ ق(∠ب هـ جـ) = ...°

∵ هـ ب = هـ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠...)

∵ أ م // ب جـ ∴ ق(∠أ) = ق(∠...) بالتبادل

∴ ق(∠أ) = ...°

⑨ إوجد قياسات زوايا △ أ ب جـ

∵ أ جـ = أ ب

∴ ق(∠...) = ق(∠...)

∴ ق(∠ب) = س + ١٠

∴ س + ١٠ + س + ١٠ + ٢س = ...

∴ ٤ س = ١٦٠ ∴ س = ...

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ... ، ق(∠أ) = ...

⑩ إوجد قيمة س

∵ أ جـ = أ ب

∴ ق(∠...) = ق(∠...)

∴ ٣س = س + ٥٠

س = ...

إذا وجـدت زاويتان في مثلث متسـاويتان في القياس فإن المثلث يكون ....

⑫ إثبت أن أ ب = أ جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

∴ ق(∠ب) = ...°

∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

∴ أ ب = ...

⑬ إثبت أن أ ب = أ جـ

ق(∠ب أ هـ) = ...°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ...°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ...

∴ ق(∠ب) = ...° ∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

∴ أ ب = ...

⑭ إثبت أن م ب = ب هـ

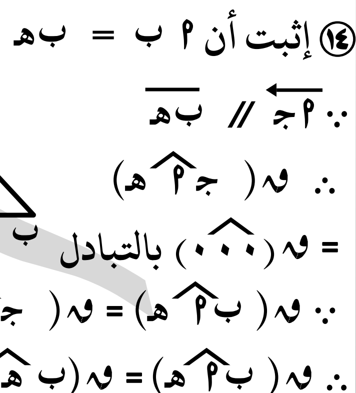
∵ م جـ // ب هـ

∴ ق (جـ م هـ)

= ق (...) بالتبادل

∵ ق (ب م هـ) = ق (جـ م هـ)

∴ ق (ب م هـ) = ق (ب هـ م) ∴ م ب = ...



⑮ إثبت أن م هـ = م م

∵ م جـ = م ب

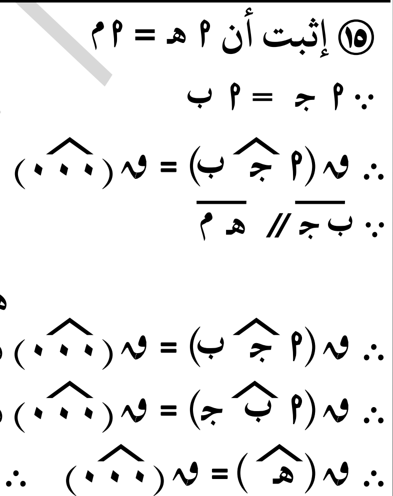
∴ ق (م جـ ب) = ق (...)

∵ ب جـ // هـ م

∴ ق (م جـ ب) = ق (...) بالتناظر

∴ ق (م ب جـ) = ق (...) بالتناظر

∴ ق (هـ) = ق (...) ∴ م هـ = م م



⑯ إثبت أن م م = م ب

∵ م جـ = م هـ

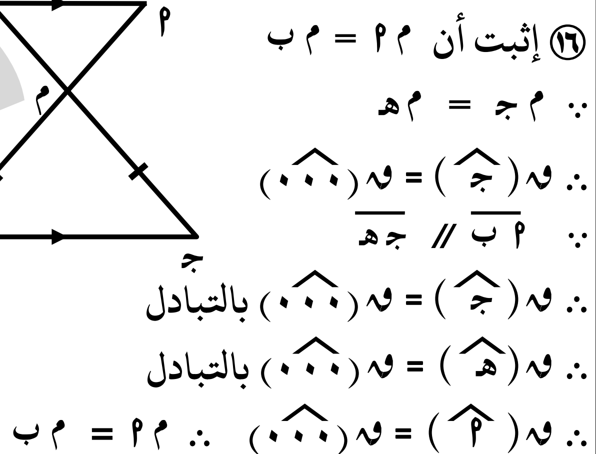
∴ ق (جـ) = ق (...)

∵ م ب // جـ هـ

∴ ق (جـ) = ق (...) بالتبادل

∴ ق (هـ) = ق (...) بالتبادل

∴ ق (م) = ق (...) ∴ م م = م ب



⑰ إثبت أن ∆ م ب ى

متساوي الاضلاع

∵مجموع قياسات زوايا

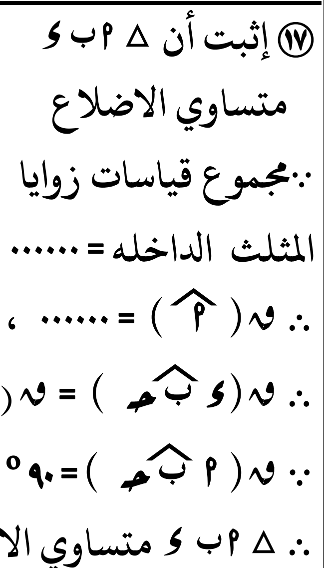
المثلث الداخله = ...

∴ ق (م) = ... ، ∵ ى جـ = ى ب

∴ ق (ى ب هـ) = ق (...) = ٣٠°

∵ ق (م ب هـ) = ٩٠° ∴ ق (م ب ى) = ...

∴ ∆ م ب ى متساوي الاضلاع



⑱ إثبت أن

ق (م هـ جـ) = ق (م جـ هـ)

∵ م ب = م م

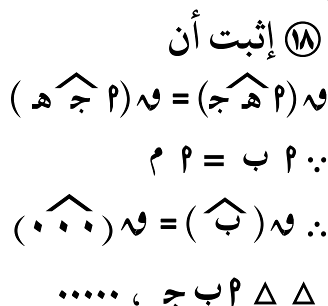
∴ ق (ب) = ق (...)

∆ ∆ م ب جـ ، ......

فيهما .... ، .... ، ....

∴ ∆ ∆ متطابقان وينتج أن م جـ = م هـ

∴ ق (م هـ جـ) = ق (م جـ هـ)



⑲ اثبت أن

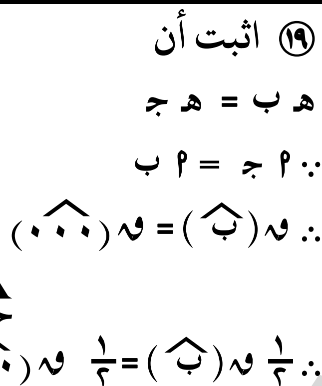
هـ ب = هـ جـ

∵ م جـ = م ب

∴ ق (ب) = ق (...)

∴ ½ ق (ب) = ½ ق (...)

∴ ق (هـ جـ ب) = ق (...) ∴ هـ ب = هـ جـ



⑳ إوجدمحيط ∆ م ب جـ

∵ ق (جـ) = ق (ب)

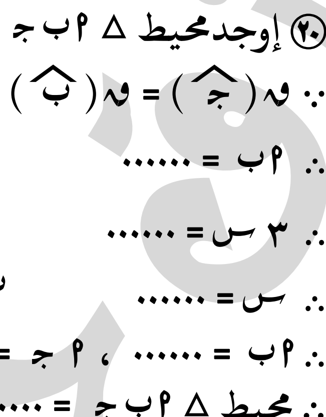
∴ م ب = ...

∴ ٣ س = ...

∴ س = ...

∴ م ب = ... ، م جـ = ... ، ب جـ = ...

∴ محيط ∆ م ب جـ = ...



㉑ إثبت أن جـ م = جـ ب

∵ مجموع قياسات زوايا

المثلث الداخله = ...

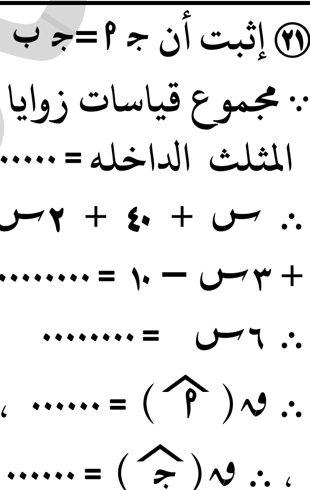
∴ س + ٤٠ + ٢ س

+ ٣ س − ١٠ = ...

∴ ٦ س = ... ∴ س = ...

∴ ق (م) = ... ، ∴ ق (ب) = ...

، ∴ ق (جـ) = ... ∴ جـ م = جـ ب



⑫ اثبت أن جـ ب = هـ جـ

∵ $\overline{جـ هـ} // \overline{ب م}$

∴ ق (جـ هـ ب)

= ق (.......) بالتبادل

∴ ق (جـ هـ ب)

= ق (جـ ب هـ) ∴ جـ ب = هـ جـ

⑬ اثبت أن جـ ب = هـ جـ

∵ △ أ جـ م

متساوي الاضلاع

∴ ق (أ جـ م) = ...°

∵ ق (أ جـ هـ) = ...°

∴ ق (ب جـ هـ) = ...° ∵ مجموع قياسات زوايا

المثلث الداخله = ... ∴ ق (ب) = ...°

∵ ق (ب) = ق (هـ) ∴ جـ ب = جـ هـ

⑭ إثبت أن

$\overleftarrow{أ جـ} // \overline{م هـ}$

∵ أ هـ = أ م

ق (هـ) = ق (.......)

∵ ق (ب أ هـ) = ق (هـ) + ق (.......)

∵ $\overleftarrow{أ جـ}$ ينصف (ب أ هـ)

∵ ق (جـ أ هـ) = ق (هـ) وهما متبادلتان

∴ $\overleftarrow{أ جـ} // \overline{م هـ}$

نتائج علي المثلث المتساوي الساقين

❖ المتوسط المرسوم من رأس المثلث المتســاوي الساقين .... ، ....

∵ أ ب = أ جـ

∵ هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ∴ $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ب أ جـ

❖ المستقيم الذي ينصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين .... ، ....

∵ أ ب = أ جـ

∵ $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ب أ جـ

∴ $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ∴ هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

❖ المستقيم المار برأس المثلث المتساوي الساقين وعمودي علي القاعده فإنه .... ، ....

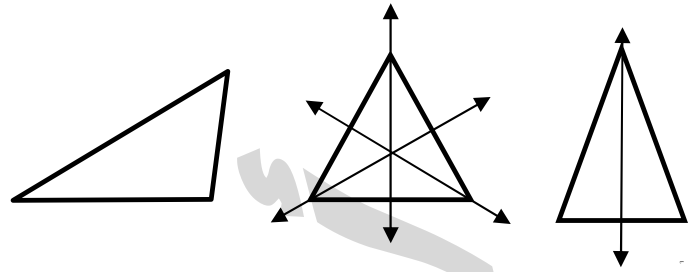
∵ أ ب = أ جـ ∵ $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب جـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ب أ جـ

❖ محور تماثل القطعه المستقيمه هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها

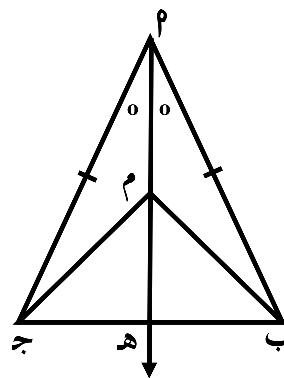
❖ أي نقطه تقع علي محور القطعه المستقيمه تكون علي بعدين............... من طرفيها

❖ أي نقط تكون علي بعدين متساويين من طرفي القطعه المستقيمه تقع علي ....



- عدد محاور المثلث المتساوي الاضلاع ....
- عدد محاور المثلث المتساوي الساقين ....
- عدد محاور المثلث المختلف الاضلاع ....
- مثلث فيه زاويتين قياسهما ٧٠° ، ٤٠° عدد محاور تماثله ....
- مثلث قائم الزاويه به زاويه قياسها ٥٠° عدد محاور التماثل له ....
- مثلث متساوي الساقين زاوية الرأس قياسها ٦٠° عدد محاور التماثل له ....
- Δ أ ب جـ ، ق(أ^) = ٥٠° ، ق(ب^) = ٨٠° فإن ب جـ = ...

- في الشكل المقابل
إثبت أن ب هـ = ½ ب جـ
إثبت أن م ب = م جـ



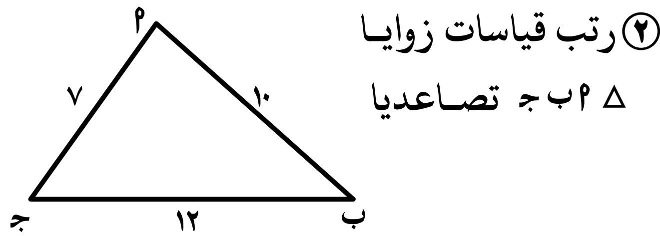
التباين

إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فإن الضلع الاكبر في الطول يقابل زاويه اكبر في القياس

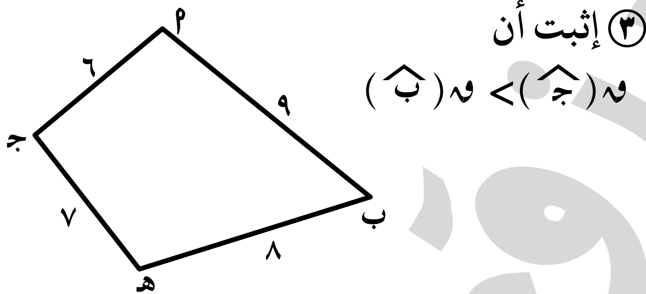
- إذا كان Δ أ ب جـ فيه أ ب > ب جـ > أ جـ
فإن ق(... ^) > ق(... ^) > ق(... ^)
- Δ أ ب جـ فيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٥ سم
فإن ق(... ^) > ق(... ^)

(١) رتب قياسات زوايا Δ أ ب جـ تصاعديا إذا كانت أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٩ سم ، أ جـ = ٥ سم

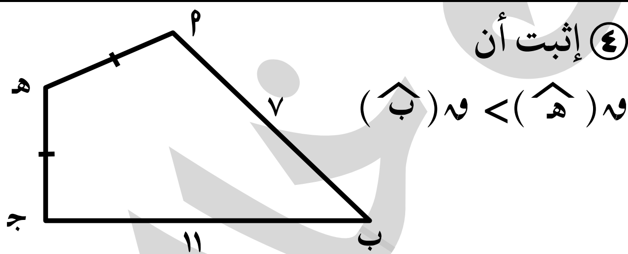
(٢) رتب قياسات زوايا Δ أ ب جـ تصاعديا



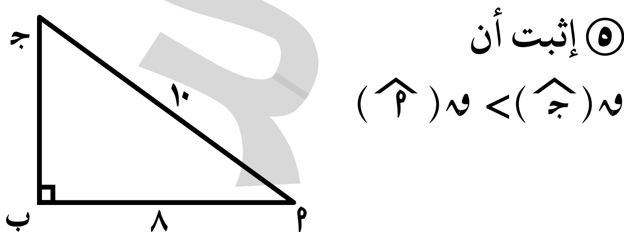
(٣) إثبت أن ق(جـ^) > ق(ب^)



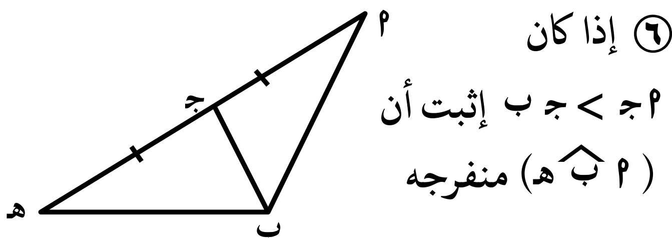
(٤) إثبت أن ق(هـ^) > ق(ب^)



(٥) إثبت أن ق(جـ^) > ق(أ^)



(٦) إذا كان أ جـ > جـ ب إثبت أن (أ ب^ هـ) منفرجه



٢ المثلث المتساوى الساقين

(١) أكمل ما يأتى بالاجابة الصحيحة

١) زاويتا القاعدة فى المثلث متساوى الساقين ....فى القياس
٢) اذا كان المثلث متساوى الاضلاع فان قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = ...
٣) قياس الزاوية الخارجة عند أى راس من رءوس المثلث المتساوى الاضلاع = ...
٤) فى Δ اب جـ اذا كان اب = اجـ ، ق(∠ا) = ٥٠° فان : ق(∠ب) = ...
٥) فى Δ اب جـ اذا كان اب = اجـ ، ق(∠ب) = ٧٠° فان : ق(∠ا) = ...
٦) اذا كان Δ اب جـ قائم الزاوية فى ب ، اب = ب جـ ، فان : ق(∠جـ) = ...
٧) فى Δ اب جـ اذا كان اب = اجـ ، ق(∠ب) = ٦٠° فان : Δ اب جـ يكون ....
٨) اذا كان قياس زاوية رأس فى المثلث متساوى الساقين = ٨٠° فان قياس زاوية قاعدته = ...
٩) فى Δ س ص ع ، اذا كان ق(∠س) = ٤٠° ، ق(∠ص) = ٧٠° فان Δ س ص ع ....الساقين
١٠) اذا تطابقت زوايا مثلث فأنه يكون ....الأضلاع
١١) فى Δ س ص ع اذا كان س ص = ص ع ، ق(∠س) = ٦٠° ومحيطه ٤٥ سم فان : ص ع = ...سم
١٢) اذا تطابقت زاويتان فى مثلث كان المثلث ....
١٣) اذا كان قياس أحدى زوايا القاعدة فى المثلث متساوى الساقين ٧٠° فان قياس زاوية الراس = ...
١٤) منصف زاوية الرأس فى المثلث متساوى الساقين .... ، ....
١٥) متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يكون .... ، ....
١٦) المستقيم المرسوم من رأس المثلث متساوى الساقين عموديا على القاعدة .... ، ....
١٧) محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم ....و ....
١٨) المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة يسمى ....
١٩) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....
٢٠) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع ....
٢١) عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع ....
٢٢) أى نقطة تقع على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على ....من طرفيها
٢٣) اذا كان المثلث متساوى الساقين قياس احدى زواياه ٦٠° فان عدد محاور تماثله ....
٢٤) اذا كان قياس احدى زوايا مثلث قائم الزاوية ٤٥° كان المثلث ....
٢٥) مثلث له محور تماثل واحد وقياس احدى زاويتى القاعدة تساوى ٥٠° فان قياس زاوية راسه = ...
٢٦) اذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٧٠° ، ٤٠° فان نوع المثلث بالنسبة لاضلاعه ....
٢٧) Δ اب جـ فيه ق(∠ا) = ٨٠° ، ق(∠جـ) = ٥٠° فان عدد محاور تماثله = ...
٢٨) المستقيم العمودى على قطعه مستقيمة من منتصفها يسمى ....
٢٩) عدد محاور تماثل القطعة المستقيمة = ...
٣٠) اذا كانت جـ ∈ لمحور تماثل $\overline{اب}$ فان .... = ...

(٢) أختر الاجابة الصحيحة

١) فى Δابج اذا كان اب = بج ، ق(∠ب) = ٤٠° فان : ق(∠ج) =..... [٤٠° ، ١٤٠° ، ٧٠° ، ٢٠°]

٢) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الاضلاع = ... [٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠°]

٣) Δس ص ع متساوى الساقين ، ق(∠س) = ٦٠° فان Δس ص ع يكون ....

[قائم الزاوية ، منفرج الزاوية ، متساوى الاضلاع ، مختلف الأضلاع]

٤) فى Δابج اذا كان اب = اج ، ق(∠ب) = ٤٥° فان Δابج يكون ....

[قائم الزاوية ، منفرج الزاوية ، حاد الزوايا ، متساوى الأضلاع]

٥) Δابج متساوى الساقين فيه ق(∠ب) = ١٠٠° فان : ق(∠ا) =......... [٤٠° ، ٥٠° ، ٨٠° ، ١٠٠°]

٦) اذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٨٠° ، ٥٠° فان المثلث يكون ....

[مختلف الاضلاع ، متساوى الاضلاع ، متساوى الساقين ، قائم الزاوية]

٧) اذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٥٠° فان قياس أحدى زاويتى قاعدته ....

[٥٥° ، ٦٥° ، ٨٠° ، ١٠٠°]

٨) عدد محاور تماثل المثلث متساوى الاضلاع = ... [صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

٩) فى Δابج اذا كان اب = بج فان ∠ج تكون .... [حادة ، منفرجة ، قائمة ، مستقيمة]

١٠) اذا كانت س ∋ لمحور تماثل $\overline{اب}$ فان اس .... ب س [= ، // ، ⊥ ، ≡]

١١) المثلث الذى طوال اضلاعه ٢ سم ، (س + ٣) سم ، ٥ سم يكون متساوى الساقين عندما س = ...

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

١٢) قياس اى زاوية من زوايا المثلث متساوى الاضلاع = ... [٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ١٢٠°]

١٣) زاويتا القاعدة فى المثلث متساوى الساقين .... [متتامتان ، متكاملتان ، متطابقتان ، مستقيمتان]

١٤) عدد محاور تماثل المثلث متساوى الساقين = ... [صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

١٥) اذا كان طول ضلع فى مثلث = $\frac{١}{٣}$ المحيط فان عدد محاور تماثل هذا المثلث = ... [صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

١٦) عدد محاور تماثل المثلث القائم الزاوية وفيه زاوية قياسها ٣٠° هو .... [صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]

(٣) أجب عن الاسئلة الأتية

١) فى الشكل المقابل : اب = اج ، ق(∠ا) = ٤٠° ،

(ا) اوجد : ق(∠ابج) ، (ب) اثبت أن : ∠ابد ≡ ∠اجه

الحــــل : ....

....

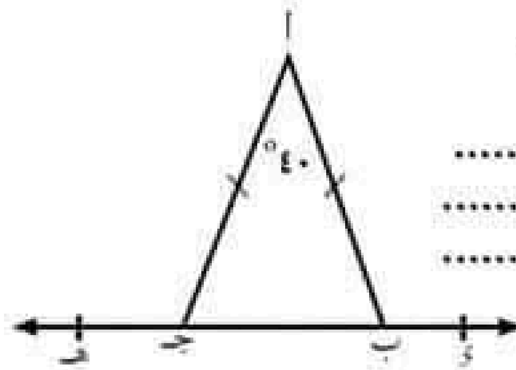
....

....

....

....

....

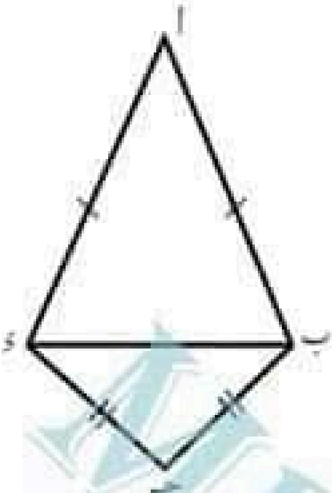


MR.SHRIEF DIAB

٢) فى الشكل المقابل : أب = أد ، جب = جد

اثبت أن : △ أب جـ ≡ △ أد جـ

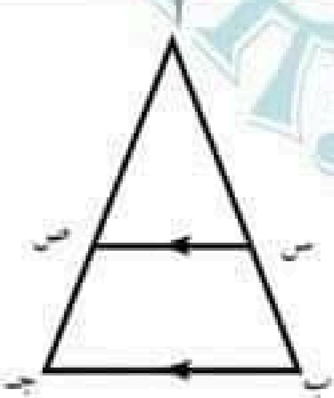
الحـــل : ....



٣) فى الشكل المقابل : أب = أجـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن : أس = أص

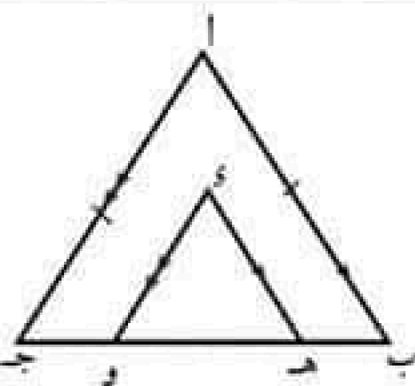
الحـــل : ....



٤) فى الشكل المقابل : أب = أجـ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$

اثبت أن : د هـ = د و

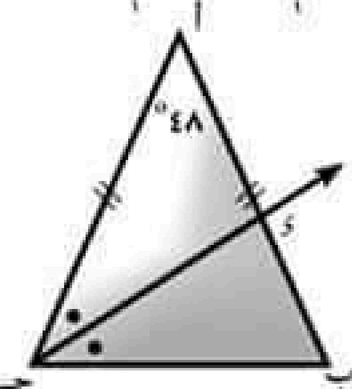
الحـــل : ....



٥) فى الشكل المقابل : أب = أجـ ، $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ ينصف ∠ ب جـ أ

أوجد : ق(∠ ب) ، ق(∠ ب جـ د)

الحـــل : ....

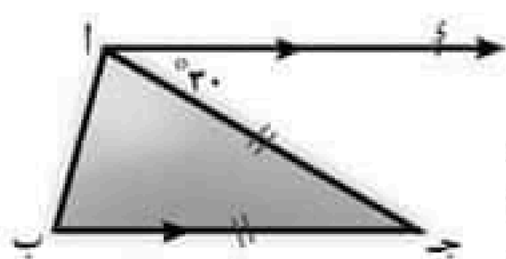


MR:SHRIEF DIAB

٥) في الشكل المقابل : جا = جب ، $\overrightarrow{أء} \parallel \overline{جب}$ ، ق(∠ءاج) = ٣٠°

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

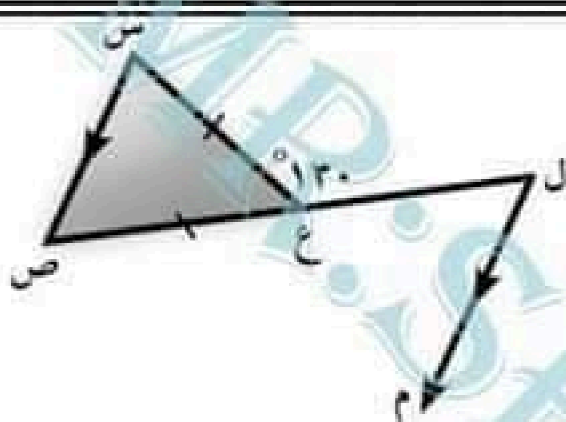
الحـــل : ....



٦) في الشكل المقابل : ع س = ع ص ، $\overrightarrow{لم} \parallel \overline{س ص}$

ق(∠س ع ل) = ١٣٠° ، أوجد ق(∠م ل ص)

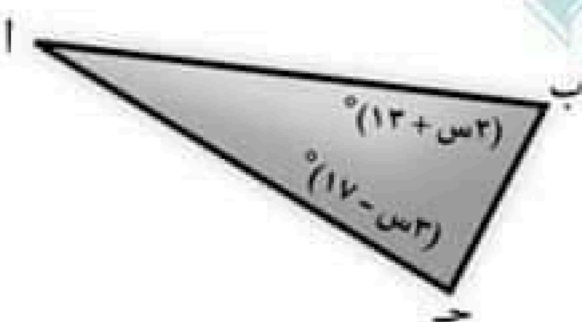
الحـــل : ....



٧) في الشكل المقابل : أب = أجـ ، ق(∠ب) = (٢س + ١٣)°

ق(∠جـ) = (٣س − ١٧)° ، أوجد قياسات زوايا Δ أب جـ

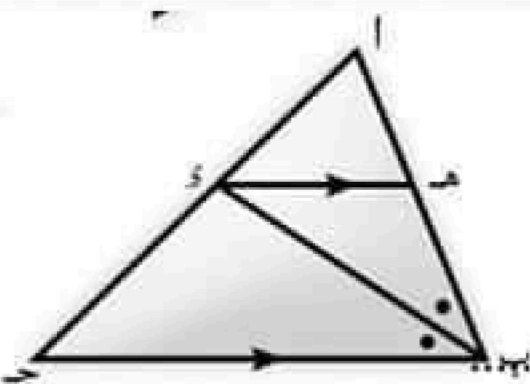
الحـــل : ....



٨) في الشكل المقابل : $\overline{بجـ} \parallel \overline{هـ ء}$ ، $\overrightarrow{بء}$ ينصف ∠أ ب جـ

اثبت أن : Δ هـ ب ء متساوي الساقين

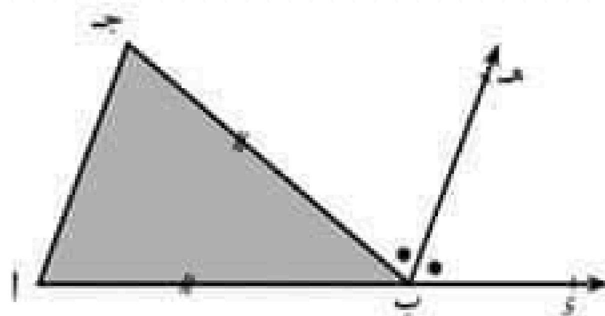
الحـــل : ....



٩) في الشكل المقابل : ب جـ = ب أ ، $\overrightarrow{بهـ}$ ينصف ∠ء ب جـ

اثبت أن : $\overrightarrow{بهـ} \parallel \overline{أجـ}$

الحـــل : ....

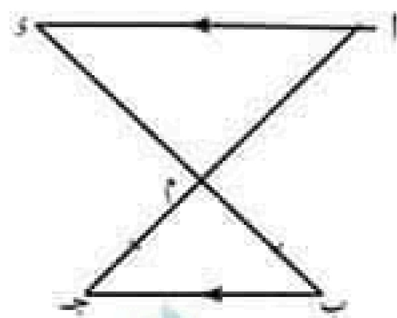


Mr.SHRIEF DIAB

١٠) فى الشكل المقابل : مب = مجـ ، $\overline{بجـ} // \overline{اد}$

اثبت أن : المثلث ا م د متساوى الساقين

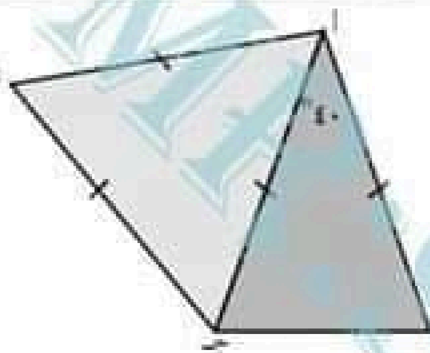
الحل : ....



١١) فى الشكل المقابل : اب = اجـ = اد = جـد ، ق(∠ب ا جـ) = ٤٠°

أوجد : ق(∠ب جـ د)

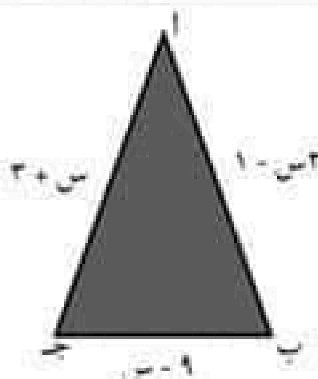
الحل : ....



١٢) فى الشكل المقابل : ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ق(∠جـ)

أوجد : محيط Δ ا ب جـ

الحل : ....

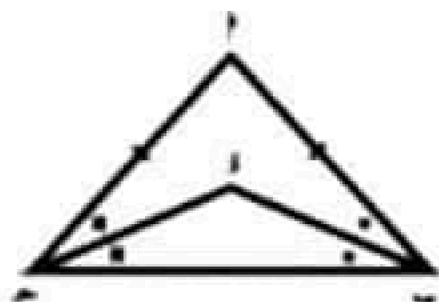


١٢) فى الشكل المقابل : ا ب جـ مثلث فيه اب = اجـ

$\overline{بد}$ ينصف ∠ب ، $\overline{جـد}$ ينصف ∠جـ

اثبت أن : Δ ب د جـ متساوى الساقين

الحل : ....



إمتحان شهر نوفمبر ٢٠٢٢م	الثاني الإعدادي	الهندسة

زمن الإمتحان ٤٥ دقيقة

((مدرسة))

الإسم / .... الفصل / ....

الدرجة

السؤال الأول:- إختر الإجابة الصحيحة فما يلي: -

(١) إذا تطابقت زوايا المثلث كان المثلث ....

(أ) قائم	(ب) متساوي الاضلاع	(ج) مختلف الاضلاع	(د) منفرج

درجة

(٢) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين ....

(أ) ٣	(ب) ٤	(ج) ٢	(د) ١

درجة

(٣) إذا كانت $\overline{أب} > \overline{جد}$ فإن جد ــ وهـ .... أب ــ وهـ

(أ) >	(ب) <	(ج) <	(د) =

درجة

السؤال الثاني :- أكمل ما يأتي :-

(١) منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون .... عليها — درجة

(٢) قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس المثلث المتساوي الاضلاع =..........° — درجة

(٣) إذا اختلف قياس زاويتان في المثلث فأكبرهما في القياس يقابلها .... — درجة

السؤال الثالث :- أجب عما يأتي :-

(١) في الشكل المقابل:- (درجتان)

△ أ ب جـ فيه

$\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ،

ق (∠ هـ أ د) = ٦٥°

أوجد:-

قياسات زوايا △ أ ب جـ

(ب) في الشكل المقابل:- (درجتان)

$\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ،

ق (∠ ب) > ق (∠ جـ)

أثبت ان:-

ق (∠ ل د هـ) > ق (∠ ل هـ د)

انتهت الاسئلة بالتوفيق....

مستر/ علي محمود حسان ٠١٠٦٠٠٢٣٧٨٩